الفصل الخامس من مبادئ الطبولوجيا العامة د.أ.

التراص في الفضاءات الطبولوجية

Compactness in topological spaces

تشغل مبرهنة هايني - بوريل Heine - Borel في التحليل الرياضي مركزاً مرموقاً نظراً للنتائج الباهرة المترتبة عليها ، والتي أسهمت إلى حدٍّ بعيد في تطوير هذا الفرع الرئيسي في علم الرياضيات . وتنص هذه المبرهنة على أنه إذا كان $[a,b]$ أيَّ مجالٍ مغلق و محدودٍ في فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbb{R},|\,|)$ ، وكانت $\{U_i\},i\in I$ أيَّ تغطيةٍ لـ $[a,b]$ مؤلفةٍ من مجالات مفتوحة ، فإن هذه التغطية تحوي تغطيةً جزئية منتهية ، و تحافظ مبرهنة هايني - بوريل على صحتها عند افتراض التغطية $\{U_i\},i\in I$ مؤلفة من مجموعاتٍ مفتوحة في $\mathbb{R}$ دون أن تكون هذه المجموعات مجالاتٍ مفتوحة بالضرورة . وكما هو الحال في كثيرٍ من المبرهنات الهامة ، فقد صدر روّاد علم الطبولوجيا، وفي طليعتهم الرياضيان السوفييتيان الكسندروف و أوريسون ، عن هذه المبرهنة في الفضاء الحقيقي المعتاد لتكون منطلقاً لتعريف صفٍّ خاص من الفضاءات الطبولوجية ، ألا وهي الفضاءات المتراصّة .

A- الفضاءات المتراصة

تعريف (1):

يقال عن فضاءٍ طبولوجي (X,τ) إنه متراصٌّ إذا حوت كلُّ تغطيةٍ مفتوحة لهذا الفضاء تغطيةً جزئية منتهية .

وإذا كانت A مجموعة جزئية من X ، فإننا نقول عن A إنها متراصةٌ إذا حوت كلُّ تغطيةٍ لِـ A بمجموعاتٍ مفتوحة في X تغطيةً جزئية منتهية .

يمكن التحقق من أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة A متراصة هو أن يكون الفضاء الجزئي (A,τ_A) متراصاً ، وذلك أنَّ الشرطَ اللازم والكافي كي تشكل الجماعة $\{U_i\},i\in I$ من المجموعات الجزئية المفتوحة في X تغطية مفتوحة للمجموعة الجزئية A هو أن تشكل الجماعة $\{A\cap U_i\},i\in I$ من المجموعات المفتوحة في A تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي (A,τ_A)

كذلك ، يمكن التحقق من أنه إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين في X بحيث $B\subseteq A$ فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون B متراصة في A هو أن تكون B متراصة في X .

مثال (1): لتكن X مجموعة غير منتهية ، و لنرمز بـ τ لاجتماع المجموعة $\{\phi\}$ مع جماعة كل المجموعات الجزئية من X التي كلٍ منها مؤلفٌ من جميع عناصر X باستثناء عدد منتهٍ منها . من السهل التحقق بأن (X,τ) فضاء طبولوجي . لتكن $\{U_i\},i\in I$ أيَّ تغطيةٍ مفتوحةٍ لـ X ، و لنختر أيَّ عنصر يختلف عن ϕ من هذه التغطية ، و ليكن U_{i_0} عندئذٍ تحوي المجموعة الجزئية U_{i_0} جميع نقاط X باستثناء عدد منتهٍ من نقاط X ، ولتكن النقاط $x_1,x_2,\dots\dots,x_k$. لما كانت $\{U_i\},i\in I$ تغطية مفتوحة للمجموعة X ، فإن كل نقطة من X تنتمي إلى واحدٍ على الأقل من عناصر التغطية ، وبالتالي ، فثمة عناصر $U_{i_1},U_{i_2},\dots,U_{i_k}$ من $\{U_i\},i\in I$ بحيث يكون $x_1\in U_{i_1},x_2\in U_{i_2},\dots,x_k\in U_{i_k}$ لذا فإن $X=U_{i_0}\cup U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\dots\cup U_{i_k}$. وهكذا فإن $\{U_{i_0},U_{i_1},U_{i_2},\dots,U_{i_k}\}$ تمثل تغطية جزئية منتهيةً من التغطية المفتوحة الاختيارية $\{U_i\},i\in I$ لـ X ، إذن (X,τ) فضاءٌ متراصٌ.

نستنتج من التعريف ومن تعريف "فضاءات ليندليوف" أن كلَّ فضاءٍ متراصٍ هو فضاء ليندليوف . و يبيّن المثال التالي عدم صحة عكس هذه النتيجة .

مثال (2): لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbb{R},|\ |)$ ، ولتكن $A=]0,1[$. لما كان $(\mathbb{R},|\ |)$ فضاءً متمتعاً بقابلية العدّ الثانية" ، فإن الفضاء الجزئي $(A,|\ |_A)$ يتمتع بقابلية العدّ الثانية كذلك ، و بالتالي فإن هذا الفضاء الجزئي هو فضاء ليندليوف . بيد أن هذا الفضاء الجزئي ليس متراصاً ، ذلك أنه يمكن التحقق من أن الجماعة $\left\{\left]\frac{1}{n+1},1\right[\right\},n=1,2,\dots$ تشكل تغطية مفتوحة لـ $]0,1[$ ، دون أن تحوي هذه التغطيةُ تغطيةً جزئية منتهية .

مبرهنة (هايني – بوريل) :

إن أيَّ مجالٍ مغلق و محدود $[a,b]$ في فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد يكون متراصاً .

تعريف (2):

لتكن X مجوعة ما و $\{A_i\},i\in I$ جماعة من المجموعات الجزئية من X . نقول عن $\{A_i\},i\in I$ إنها جماعةٌ تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي (أو جماعةٌ متمركزة) إذا كان لأيِّ جماعةٍ جزئيةٍ منتهيةٍ من $\{A_i\},i\in I$ تقاطعٌ غير خالٍ .

مبرهنة (1): الشرط اللازم و الكافي كي يكون (X,τ) فضاءً متراصاً هو أن يكون لأي جماعةٍ متمركزةٍ $\{F_i\},i\in I$ من المجموعات الجزئية المغلقة في (X,τ) تقاطعٌ غير خالٍ .

مبرهنة (2) : إذا كان f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتراص (X,τ) في الفضاء (Y,τ') ، فإن $f(X)$ مجموعة جزئية متراصة في (Y,τ') .

مبرهنة (3):

- إن أي فضاءٍ جزئي **مغلق** من فضاءٍ متراصٍ لا بد و أن يكون متراصاً .
- الشرط اللازم و الكافي كي يكونَ فضاءُ جداء جماعةٍ منتهية من الفضاءات غير الخالية متراصاً هو أن يكون كلُ فضاءٍ من الجماعة متراصاً . (مبرهنة تيخونوف) .

مثال (3):

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbb{R},|\ |)$. و لنأخذ المجموعة $X=[0,1]$ المزودة بالطبولوجيا النسبية $|\ |_X$ ، إن الفضاء $(X,|\ |_X)$ متراصٌ . لنأخذ المجموعة الجزئية $]0,1[$ من X . إن $]0,1[$ مجموعة مفتوحة في $(X,|\ |_X)$ ، لكنها غير متراصة في $(X,|\ |_X)$ ، إذن فالمجموعة الجزئية (غير المغلقة) $]0,1[$ من الفضاء المتراص $(X,|\ |_X)$ ليست متراصة .

مبرهنة (4) : إذا كان (X,τ) فضاءً هاوسدورفياً أي فضاءً T_2 ، و كانت A مجموعة جزئية متراصة في (X,τ) فإن A مغلقة في (X,τ) .

٣ نتائج :

أ - الشرط اللازم و الكافي كي تكون مجموعة جزئية من فضاءٍ متراصٍ و T_2 متراصة هو أن تكون هذه المجموعة مغلقة .

ب - كلُّ فضاءٍ T_2 و متراصٌ هو فضاءٌ T_3 .

ج - كلُّ فضاءٍ T_2 و متراصٌ هو فضاءٌ T_4 .

مبرهنة (5): إذا كان f تطبيقاً مستمراً متبايناً و غامراً للفضاء المتراص (X,τ) على فضاء هاوسدورف (Y,τ') ، فإن f يكون تشاكلاً (هوميومورفيزماً).

B- الفضاءات المتراصة موضعيّاً

تعريف :

نقول عن فضاءٍ طبولوجي (X,τ) إنه متراصٌ موضعيّاً إذا وجد لأي عنصر x من X جوارٌ لصاقته متراصّة . و يقال عن مجموعة جزئية A من X إنها متراصّة موضعيّاً إذا كان الفضاء الجزئيّ (A,τ_A) متراصاً موضعيّاً .

مثال : لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbb{R},|\ |)$ ، و ليكن x أي عنصر من $\mathbb{R}$. نلاحظ أن المجال المفتوح $]x-1,x+1[$ جوارٌ لـ x ، و أن لصاقة هذا الجوار هي المجال المغلق و المحدود (المتراص وفق مبرهنة هايني بوريل) $[x-1,x+1]$ ، فالفضاء $(\mathbb{R},|\ |)$ متراصٌ موضعيّاً . إلا أنه ليس متراصاً . حيث لا يمكن أن نستخلص من التغطية المفتوحة $\{]k,k+2[,k\in\mathbb{Z}\}$ للفضاء $(\mathbb{R},|\ |)$ تغطية جزئية منتهية .

مبرهنة (1) : كلُّ فضاءٍ متراصٌ لا بد و أن يكون متراصاً موضعيّاً .

مبرهنة (2) : ليكن (X,τ) فضاءً متراصاً موضعيّاً ، و لتكن A مجموعة جزئية من X . عندئذٍ:

- إذا كانت A مغلقة في (X,τ) ، فإن A متراصّة موضعيّاً .
- إذا كانت A مفتوحة في (X,τ) و كان (X,τ) فضاءً T_3 ، فإن A متراصّة موضعيّاً

C- رصّ الفضاءات الطبولوجية

تعريف : يقال عن فضاءٍ طبولوجي متراصٌ (Y,τ') إنه رصٌّ للفضاء الطبولوجي (X,τ) إذا وُجد هوميومورفيزمٌ (تصاكل) بين (X,τ) و فضاءٍ جزئي كثيفٍ من (Y,τ') . و يتم في الغالب رصُّ الفضاء (X,τ) بإضافة نقطةٍ أو أكثر إلى X ، ثم بتزويد المجموعة الموسّعة Y بطبولوجيا τ' بحيث يغدو الفضاء الموسّع (Y,τ') متراصاً ، و بحيث يكون (X,τ) فضاءً جزئياً كثيفاً من (Y,τ') .

تطبيق:

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbb{R},|\ |)$ ، ولنضف إلى $\mathbb{R}$ نقطتين جديدتين سنرمز لهما بـ $+\infty,-\infty$. تسمى المجموعة $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ ممدد المحور الحقيقي . و من الممكن توسيع علاقة الترتيب $\leq$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث تشمل $\mathbb{R}^*$ ، و ذلك بافتراض

$-\infty < \alpha < +\infty$ أيا كان α من $\mathbb{R}$. من السهل التحقق بأن جماعة كل المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^{\bullet}$ ذات الأنماط $]a,b[,[-\infty,a[,]b,\infty]$ تشكل قاعدةً لطبولوجيا $|\ |^{\bullet}$ على $\mathbb{R}^{\bullet}$ بحيث يكون $(\mathbb{R},|\ |)$ فضاءً جزئياً كثيفاً من $(\mathbb{R}^{\bullet},|\ |^{\bullet})$. سنبين الآن أن الفضاء $(\mathbb{R}^{\bullet},|\ |^{\bullet})$ متراصٌ .
لتكن $\{U_i\},i\in I$ تغطية مفتوحة ما لـ $\mathbb{R}^{\bullet}$. إذن هنالك عنصرٌ U_{i_0} من هذه التغطية يحوي $-\infty$ و عنصرٌ آخر U_{i_1} من هذه التغطية يحوي ∞ . و بالتالي فثمة عنصرٌ $[-\infty,a[$ من القاعدة محتوىً في U_{i_0} ، و عنصرٌ آخر $]b,\infty]$ من القاعدة محتوىً في U_{i_1} ، إن $\mathbb{R}^{\bullet}-([-\infty,a[\cup]b,\infty])=[a,b]$ مجموعة متراصّة في $(\mathbb{R},|\ |)$. و لما كان $(\mathbb{R},|\ |)$ فضاءً جزئياً من $(\mathbb{R}^{\bullet},|\ |^{\bullet})$ ، فإن $\{\mathbb{R}\cap U_i\},i\in I$ تشكل تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي $(\mathbb{R},|\ |)$.
و بما أن $[a,b]$ مجموعة متراصّة في $(\mathbb{R},|\ |)$ ، فإن $[a,b]$ محتواة في اجتماع جماعةٍ جزئيةٍ منتهيةٍ $\{\mathbb{R}\cap U_{i_2},\ldots,\mathbb{R}\cap U_{i_n}\}$ من $\{\mathbb{R}\cap U_i\},i\in I$. من الواضح بعد هذا أن نرى بأن $\{U_{i_0},U_{i_1},\ldots,U_{i_n}\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة $\{U_i\},i\in I$ للفضاء $(\mathbb{R}^{\bullet},|\ |^{\bullet})$. إذن $(\mathbb{R}^{\bullet},|\ |^{\bullet})$ فضاءٌ متراصٌ .

مبرهنة *(1)* *(مبرهنة الرصّ)* : ليكن (X,τ) فضاءً T_2 و متراصّاً موضعياً و غير متراصّ ، و ليكن ∞ شيئاً ما غير منتمٍ إلى X ، و لنشكل المجموعة $X_\infty = X\cup\{\infty\}$. و لتكن τ_∞ جماعة من المجموعات الجزئية من X_∞ مؤلفة من المجموعات التالية : عناصر τ ، متممات المجموعات الجزئية المتراصّة في (X,τ) ، المجموعة X_∞ بأكملها . عندئذٍ:

أ- تشكل τ_∞ طبولوجيا على X_∞ ، كما يكون (X,τ) فضاءً جزئياً كثيفاً من (X_∞,τ_∞).
ب- (X_∞,τ_∞) فضاءٌ متراصٌ .
ج- (X_∞,τ_∞) فضاءٌ T_2 .

نسمي الفضاء (X_∞,τ_∞) المتراصّ و T_2 المرتبط بالفضاء (X,τ) المتراصّ موضعياً و T_2 وفق الأسلوب السابق **رصّ ألكسندروف أو رصّاً وحيد النقطة** للفضاء (X,τ) ، كما نسمي ∞ **النقطة المثالية أو النقطة في اللانهاية** .

مبرهنة *(2)*: إذا كان (X,τ) فضاءً T_2 و متراصّاً موضعياً T_2 فهو فضاءٌ منتظم (أي T_3).

واجب

① ابحث في [illegible] بين التراص : الفضاءات للتراص ،
② ابحث في [illegible] التوابع [illegible] على مجموعة متراصة
③ " " " المبرهنات في الأعظمية و التراص .

١١ / ١٢ / ٢٠١٦

C_5

locally compact space	فضاء متراص موضعياً
metric space	فضاء متري
connected space	فضاء متصل (مترابط)
locally connected space	فضاء متصل موضعيا (مترابط موضعياً)
first countable space	فضاء متمتع بقابلية العدّ الأولى
second countable space	فضاء متمتع بقابلية العدّ الثانية
totally bounded space	فضاء محدود كليا
regular space	فضاء منتظم
completely regular space	فضاء منتظم تماماً
discrete space	فضاء متقطع
normal space	فضاء ناظميّ (سويّ)
completely normal space	فضاء ناظميّ تماماً
hausdorff space or separated space	فضاء هاوسدورف (أو فضاء منفصل)
isometric spaces	فضاءات إيزومترية
topologically equivalent spaces	فضاءات متكافئة طبولوجيا
homeomorphic spaces	فضاءات هوميومورفية
base (basis)	قاعدة (أساس)
base for a topology	قاعدة طبولوجيا
subbase (subbasis)	قاعدة جزئية
countable base	قاعدة قابلة للعدّ (عدودة)
closure of a set	لصاقة مجموعة
metric (distance function)	مترك (تابع مسافة)
set	مجموعة