نظرية الاحتمالات

محاضرة 9

/ /

تمرين: ألقينا حجر نرد مرتين وليكن Y المتغير الدال على أكبر الوجهين الحاصلين و Z المتغير الدال على أصغر الوجهين عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y و Z ثم دالة توزيعها.

الحل: نحدد مجموعة قيم المتغيرين

$R_y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3) \dots (1,$
36 $(2,1) \dots (3,1) \quad (6,1)$
حالة

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وجدول الكثافة Y و Z

Y	1	2	3	4	5	6	مجموع
$P_Y(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

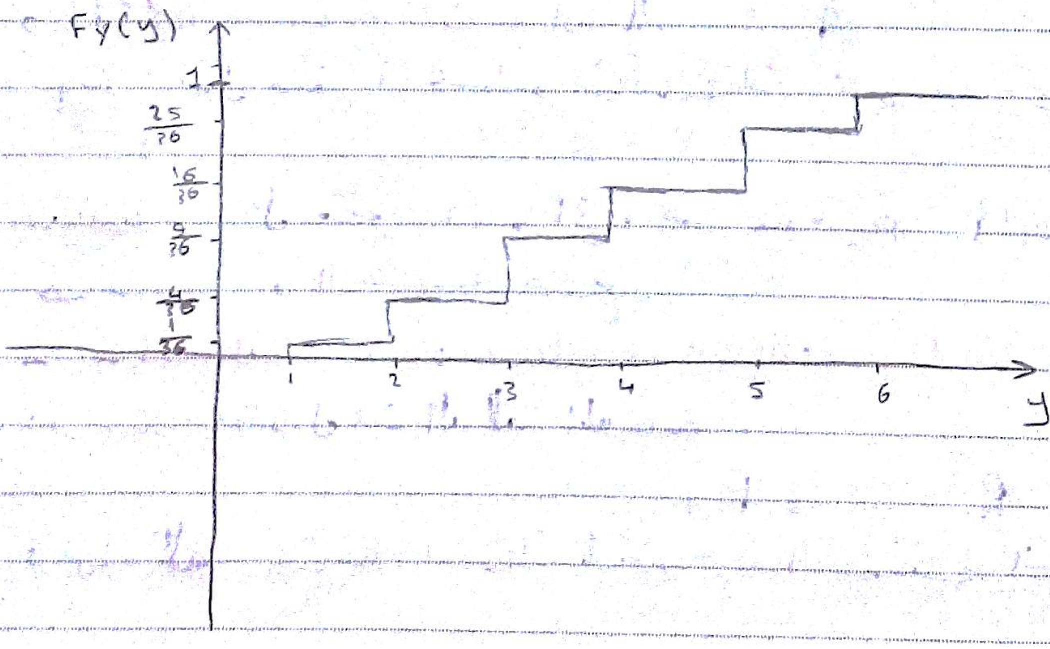
Z	1	2	3	4	5	6	مجموع
$P_Z(3)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ودالة التوزيع لهما:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \leq y < 2 \\ \frac{4}{36} & 2 \leq y < 3 \\ \frac{9}{36} & 3 \leq y < 4 \\ \frac{16}{36} & 4 \leq y < 5 \\ \frac{25}{36} & 5 \leq y < 6 \\ 1 & 6 \leq y \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \leq z < 2 \\ \frac{30}{36} & 2 \leq z < 3 \\ \frac{27}{36} & 3 \leq z < 4 \\ \frac{32}{36} & 4 \leq z < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \leq z < 6 \\ 1 & 6 \leq z \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < y_1 \\ f(y_1) & ; y_1 \leq y < y_2 \\ f(y_1) + f(y_2) & ; y_2 \leq y < y_3 \\ f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) & ; y_3 \leq y < y_4 \\ \vdots & \\ 1 & ; y_n \leq y \end{cases}$$



تعريف: دالة حدث ((الدالة المميزة لحدث أو (مجموعة))

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً وليكن $A \in F$ نقول عن الدالة $\chi_A : \Omega \longrightarrow R$ إنها تمثل دالة حدث A إذا حققت الشرط:

$$\forall w \in \Omega : \quad \chi_A(w) = \begin{cases} 0 & w \notin A \quad \forall w \in A' \\ 1 & w \in A \end{cases}$$

وبالتالي إذا كانت $\chi_A : \Omega \to R$ دالة الحدث A

وكان $B \subseteq R$ فإن

$$\chi_A^{-1}(B) = [\chi_A \in B]$$

$$= \begin{cases} A & ; \{1\} \in B \ , \ \{0\} \notin B \\ A' & ; \{0\} \in B \ ; \ \{1\} \notin B \\ \Omega & ; \{0,1\} \in B \\ \phi & ; \{0,1\} \notin B \end{cases}$$

وبالتالي نستنتج أن دالة الحدث A:

χ_A تمثل متغيراً عشوائياً منفصلاً مجموعة قيمه $\{0,1\}$

نتيجة: كل متغير عشوائي مجموعة قيمه $\{0,1\}$ يمثل دالة حدث والعكس صحيح

- دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع لمتغير عشوائي مستمر:

تعريف: نقول عن الدالة الموجبة:

$$f : R \longrightarrow R_+$$

إنها دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي Y إذا حققت:

1) $f_Y(y) \geq 0 \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}$ لأن الدالة موجبة

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1$.

ومن أجل f دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي Y نعرّف دالة التوزيع الاحتمالي لـ Y :

$$\boxed{F_Y(y) = P(Y \leq y) := \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\, dy}$$

منفصل

$$\sum_{y_i \leq y} f_Y(y)$$

نتائج وملاحظات (حالة الاستمرار):

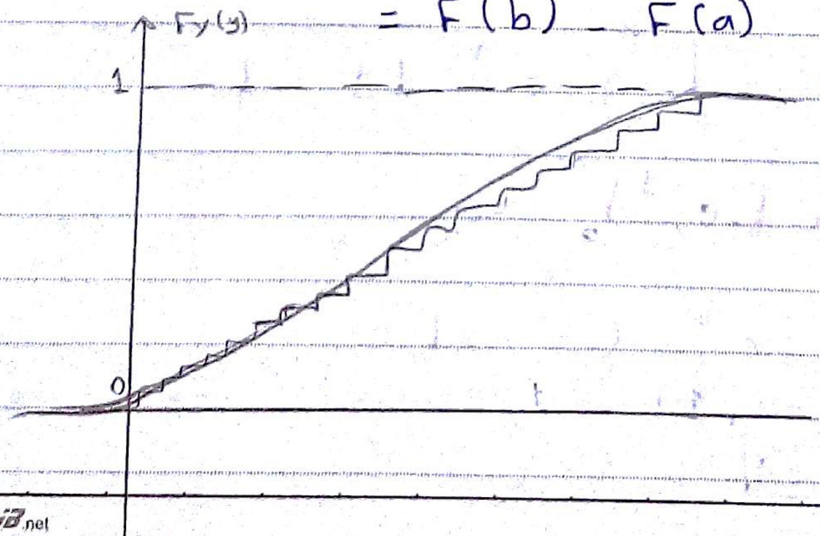
① $F(y^+) = F(y^-) = F(y)$

$$= P(Y \leq y) = P(Y < y)$$

② $P(a \leq Y \leq b) = P(a < Y < b)$

$$= P(a \leq Y < b) = P(a < Y \leq b)$$

$$= F(b) - F(a)$$



هكذا شكله

/ /

③ إذا كانت $A \subseteq R$ فإن:

$$P(Y \in A) = \int_A f_Y(y)\, dy$$

④ إذا كانت $F_Y(y)$ دالة التوزيع لمتغير عشوائي Y مستمر فإنه حسب ليبنتز نجد أن

$$\boxed{f_Y(y) = F_Y'(y)}$$

من أجل كل نقطة y تكون عندها f مستمرة

تمرين: ليكن Y متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة

$$f_Y(y) = \begin{cases} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \; \underbrace{e^{-y}}_{\geq 0} & ; y \geq 0 \quad ((\lambda \text{ ثابت موجب تماماً})) \\ 0 & ; \text{ خلاف ذلك} \end{cases}$$

1- عين λ لتكون f دالة كثافة مثلية احتمالية لـ Y

2- عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ Y واحسب $F(2,5)$ يأتي السؤال 2 بعد أن نثبت أن $\boxed{\lambda = 1}$

الحل:

حتى تكون f دالة كثافة مثلية لـ Y يجب تحقق الشرطين

1- ① $f_Y(y) \geq 0$ وهو محقق.

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} (0)\, dy + \int_{0}^{+\infty} \lambda . e^{-y}\, dy = 1$$

$$0 + \lambda \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\lambda \left[-e^{-\infty} - (-e^{0})\right] = 1$$

$$\lambda [0 + 1] = 1$$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

/ /

فتصبح دالة الكثافة بالشكل :

$$f_y(y) = \begin{cases} e^{-y} & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases}$$

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^{t} f_y(y) \, . \, dy$$ -2

من أجل $y < 0$:

$$F_y(t) = \int_{-\infty}^{t} (0) \, dy = 0$$

$y \geq 0$:

$$F_y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_y(y) \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0) \, dy + \int_{0}^{t} e^{-y} \, dy$$

$$= 0 + \left[- e^{-y} \right]_0^t$$

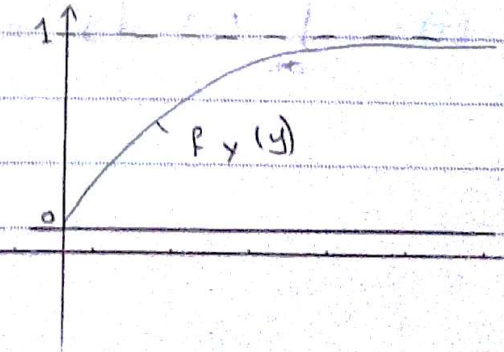
$$= - e^{-t} - (- e^{0})$$

$$= - e^{-t} + 1 = \boxed{1 - e^{-t}}$$

فتكون دالة التوزيع لـ Y :

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ 1 - e^{-y} & ; y \geq 0 \end{cases}$$

الدالة متزايدة نحو الواحد



$$F(2,5) = 1 - e^{-2,5} = 0,92$$

تمرين : لتكن الدالة :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \ y \leq 0 \\ y & ; \ 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} & ; \ 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \ 2 \leq y \end{cases}$$

① برهن أن $f_Y(y)$ دالة الكثافة احتمالية مثلية لمتغير عشوائي Y

② أوجد دالة التوزيع $F_Y(y)$ ثم احسب $F(0,2)$ ، $F(1,5)$ و $P\left(\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{3}{2}\right)$

الحل :

① الشرط الأول محقق $f_Y(y) \geq 0$

الشرط الثاني

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \stackrel{?}{=} 1$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dy + \int_{0}^{1} y \, dy + \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{2}\right) dy + \int_{2}^{+\infty} (0)\, dy$$

$$= 0 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{y}{2}\right]_1^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

إذن هي دالة كثافة احتمالية مثلية لـ Y

②

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\, dy$$

* $y \leq 0$:

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} (0)\, dy = 0$$

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dy + \int_{0}^{t} y\, dy$$

$$= 0 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

$1 \leq y < 2$ *

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dy + \int_{0}^{1} y\, dy + \int_{1}^{t} \frac{1}{2}\, dy$$

$$= 0 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{y}{2}\right]_1^t$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{t}{2}$$

$2 \leq y$ *

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\, dy$$

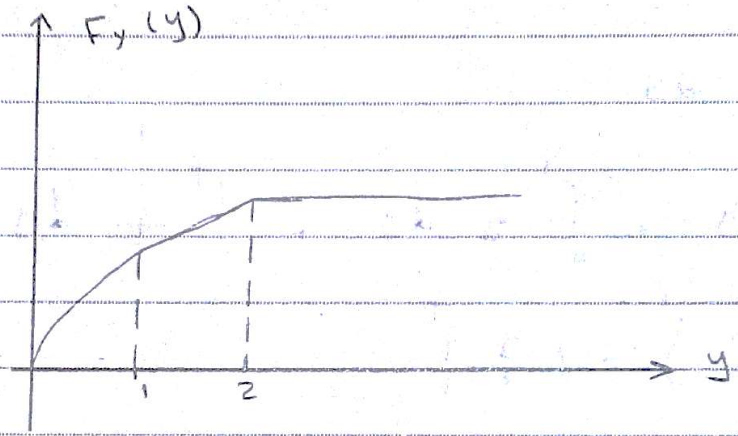
$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dy + \int_{0}^{1} y\, dy + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\, dy + \int_{2}^{t} (0)\, dy$$

$$= 0 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{y}{2}\right]_1^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

فتكون دالة التوزيع لها الشكل:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ \frac{t^2}{2} & ; 0 \leq y < 1 \\ \frac{t}{2} & ; 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & ; 2 \leq y \end{cases}$$



$$F(0{,}2) = \frac{(0{,}2)^2}{2} = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$$

$$F(1{,}5) = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$$

$$P\left(\overset{0{,}5}{\frac{1}{2}} \leq Y \leq \overset{1{,}5}{\frac{3}{2}}\right) = F(1{,}5) - F(0{,}5)$$

$$= \frac{1{,}5}{2} - \frac{(0{,}5)^2}{2} =$$

انتهت المحاضرة التاسعة...