التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : السادسة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/١

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

لنبدأ ببعض الأمثلة التي ترمم ما مر معنا في المحاضرة السابقة

مثال:

$$f_n(x)=\frac{1}{nx+1} \qquad I=[0,\infty[$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx+1}=\begin{cases}1 & : x=0\\ 0 & : x>0\end{cases}$$

فهي أيضاً متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x)=0$

إذا كان الشرط $x\in[0,\infty[\quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=0$ محقق تكون عندها المتتالية متقاربة بانتظام من التابع الصفري حسب المبرهنة(٤) والآن لنرى إذا كان الشرط محقق أم لا.

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{1}{nx+1}\right|=1\neq 0$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|\neq 0$$

$$\sup\left|\frac{1}{nx+1}\right|=1$$

مثال:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad ; \quad I=[0,1]$$

تابع النهاية:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & : x=0\\ \dfrac{n}{1+n^2} & : x=1\\ \dfrac{1}{2} & : x=\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{nx}{n^2x^2+1} & : 0<x\neq\dfrac{1}{n}<1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & : x=0\\ 0 & : x=1\\ \dfrac{1}{2} & : x=\dfrac{1}{n}\\ 0 & : 0<x\neq\dfrac{1}{n}<1\end{cases}=\begin{cases}0 : x\neq\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{1}{2} \quad : x=\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0 \quad ; \quad x\in[0,1]$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام من التابع الصفري حسب المبرهنة (٤)

تعريف: متتالية التوابع حدودها $f_1(x)\,,f_2(x)\,,\dots,f_n(x)$

نسمي مجموع هذه الحدود اللانهائي بمتسلسلة توابع $f_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

ويسمى $f_1(x)$ الحد الأول لهذه المتسلسلة ويسمى $f_n(x)$ الحد النوني (العام) لهذه المتسلسلة.

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I تسمى متتالية التوابع $\{s_n(x)\}$ الآتية متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على I:

$$s_1(x)=f_1(x), s_2(x)=f_1(x)+f_2(x), s_3(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$$
$$\dots, s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)$$

تعريف التقارب النقطي لمتسلسلة التوابع:

نقول عن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I أنها متقاربة نقطياً إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة نقطياً.

نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

عندئذٍ يسمى التابع $s(x)$ بتابع المجموع على I لمتسلسلة التوابع المدروسة

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \qquad \forall\, x \in I$$

تعريف التقارب بانتظام لمتسلسلة التوابع:

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ أنها متقاربة بانتظام على I إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة على I .

نتائج:

١) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فإنها متقاربة نقطياً على I

٢) إذا كانت المتسلسلة متقاربة نقطياً(أو بانتظام) على I فإن حدها العام $f_n(x)$ يسعى للصفر عندما $n \to \infty$

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s(x) - s(x) = 0$$

إن هذه النتيجة تعطي شرطاً لازماً للتقارب ولكنه غير كافٍ، فمثلاً بأخذ متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ التي حدها العام هو $f_n(x) = \frac{1}{n}$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة بالرغم من كون الحد العام يسعى إلى التابع الصفري.

٣) إذا حذفنا عدد من الحدود من بداية المتسلسلة أو أضفنا عدد منتهي من الحدود إلى بداية لمتسلسلة فإنها لا تتغير من حيث تباعدها أو تقاربها لكن يتغير مجموعها.

٤) إذا كان الحد العام لمتسلسلة يسعى إلى تابع غير التابع الصفري فإن المتسلسلة متباعدة.

٥) إذا تباعدت متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$ لمتسلسلة توابع على مجال فإن متسلسلة التوابع هذه تكون متباعدة.

٦) إن جميع القيم x من I التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة نسميها مجموعة قيم المتسلسلة المتقاربة أو **منطقة التقارب لهذه المتسلسلة.**

Syria Math

مثال(١):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

هي متسلسلة هندسية حدها الأول $a = 1$ وأساسها $r = x$

الشرط اللازم والكافي لتقاربها هو $|x| < 1$ أي $x \in I =]-1,1[$

فمنطقة تقاربها هي المجال $]-1,1[$

نأخذ المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

متقاربة من أجل $|x| < 1$

مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

تذكرة:

$$s_n(x) = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

حيث x هو الأساس و a هو الحد الأول.

➢بالعودة إلى المثال السابق:

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \Rightarrow s(x) = \frac{1}{1 - x}$$

لأنه عندما تسعى الـ n للانهاية هذا المقدار x^{n+1} يسعى للصفر.

و عليه يكون مجموع المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$ هو $s = \frac{x^2}{1-x}$

المتسلسلتين متقاربتين من أجل $|x| < 1$ لكن مجموعها مختلف وبملاحظة أن هذه المتسلسلة تنتج من المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بعد حذف حديها الأول والثاني إلا أنها بقيت متقاربة على I وتابع مجموعها تغير عن تابع مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

مثال(٢):

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة وادرس تقاربها $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$

نأخذ متتالية مجاميعها الجزئية ثم نرى مجال التقارب.

$$s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - x^{n+1}$$

من أجل $n = 1$ تعطينا $x - x^2$

من أجل $n = 2$ تعطينا $x^2 - x^3$

من أجل $n = n - 1$ تعطينا $x^{n-1} - x^n$

أي:

$$s_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + (x^n - x^{n+1})$$

$$\Rightarrow s_n(x) = x - x^{n+1}$$

والآن نأخذ نهاية متتالية المجاميع الجزئية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x - x^{n+1}) = x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad x = 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x & ; \quad |x| < 1 \\ -\infty & ; \quad x > 1 \\ \text{غير موجودة} & ; \quad x \leq -1 \end{cases}$$

منطقة تقارب هذه المتسلسلة هي $|x| < 1$ و $x = 1$ أو $]-1,1]$

و تابع المجموع هو:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 1 \\ x & ; \quad |x| < 1 \end{cases}$$

تابع غير مستمر لأنه يعاني من انقطاع عند النقطة $x = 1$ على هذا المجال وبالتالي المتسلسلة متقاربة نقطياً على المجال $]-1,1]$ من $s(x)$

تعريف: يقال عن متسلسلة توابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I أنها متقاربة نقطياً على المجال I إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة كمتسلسلة عددية من أجل كل نقطة x من I.

مثال:

بين إذا كانت متسلسلة التوابع الآتية متقاربة نقطياً على $I = [0,1]$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \cdots$$

الحل:

$$s_n(x) = \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \ldots - \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right)$$
$$= \frac{1}{x+n}$$

والآن نأخذ نهاية متتالية المجاميع الجزئية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0$$

وبالتالي المتسلسلة متقاربة نقطياً من التابع الصفري.

هل هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$؟

$\forall\, \varepsilon > 0$ يوجد عدد $0 \neq N > \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث يكون:

$$|s_n(x) - s(x)| = \left|\frac{1}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

وبملاحظة أن N مرتبط فقط بـ ε ومستقل عن x نجد أن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة بانتظام أي المتسلسلة متقاربة بانتظام على $[0,1]$

مثال:

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ المعرفة على $R\backslash\{-1\}$

الحل :

نلاحظ أن المتسلسلة المعطاة متسلسلة هندسية تتقارب عندما و فقط عندما يكون $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$

و لنضرب الطرفين بالمقدار غير السالب $|x+1|$ فينتج أن : $|x-1| < |x+1|$ وهذا يكافئ قولنا أن :

$$-|x+1| < x-1 < |x+1| \ldots.(*)$$

و هنا لنميز حالتين :

١- إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$ عندئذٍ : $|x+1| = x+1$ و بالتالي المتراجحة السابقة تكتب بالشكل :

$$-x-1 < x-1 < x+1$$

و لكنّ المتراجحة $-x-1 < x-1$ تتحقق عندما و فقط عندما x>0

و المتراجحة $x-1 < x+1$ تتحقق من أجل جميع قيم x كونها تكافئ المتراجحة $-1 < 1$

و بأخذ تقاطع مجموعات الحلول السابقة نجد أن المتراجحة (*) في حالتنا (١) محققة من أجل $\boxed{x>0}$

٢- إذا كان $x+1<0$ أي $x<-1$ عندئذٍ : $|x+1| = -x-1$ و بالتالي المتراجحة السابقة تكتب بالشكل :

$$x+1 < x-1 < -x-1$$

و لكنّ المتراجحة $x-1 < -x-1$ تتحقق عندما و فقط عندما x<0

و المتراجحة $x+1 < x-1$ مجموعة حلولها $\emptyset$

و بأخذ تقاطع مجموعات الحلول السابقة نجد أن المتراجحة (*) في حالتنا (٢) **غير محققة أبداً**

و عليه تكون منطقة التقارب هي جميع قيم $x>0$ أو هي المجال $]0,+\infty[$

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي