المعادلات التفاضلية ١

الدكتور: خليل يحيى

المحاضرة: السابعة

التاريخ: ٢٣/١١/٢٠١٦

إعداد: محمد شهلا & محمد خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

سنبدأ محاضرتنا بعنوان فصل جديد هو :

المعادلات التفاضلية من مراتب عليا:

لتكن المعادلة التفاضلية من المرتبة n

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \dots (1)$$

حيث: $y^{(n)}$ هو المشتق من المرتبة n للتابع y بالنسبة للمتحول x و ; $n \geq 2$

وسنرى الحل العام لهذه المعادلة هو عبارة عن تابع يحوي x و y و يحوي على n ثابتاً اختيارياً

$$\varphi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

سنقدّم أولاً بعض الأنواع من المعادلات التفاضلية من المرتبة n وطرق حلّها:

لنأخذ الحالة الخاصة التي تكون فيها المعادلة من الشكل:

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 \dots (2)$$

أي تحوي x ومشتق y من المرتبة n لكن لا تحوي y ، وهنا ننظر في الحالات التالية:

- المعادلة (2) محلولة بالنسبة للمشتق أي من الشكل:

$$y^{(n)} = f(x) \dots (3)$$

فأننا نحصل على y (الحل العام) لهذه المعادلة التفاضلية بإجراء n من التكاملات المتتالية.

- إذا كان y_1 حلاً خاصاً للمعادلة (3) فيمكن بالتحويل: $y = y_1 + z$

رد المعادلة التفاضلية (3) إلى معادلة تفاضلية من الشكل: $z^{(n)} = 0 .. (4)$

وحل هذه المعادلة هو كثير حدود في x من الدرجة $(n-1)$ وبأمثال غير معينة:

$$z = P_{n-1}(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0$$

ومنه نجد الحل العام للمعادلة (3) هو:

$$y = y_1 + P_{n-1}(x) \dots (5)$$

- والحل الخاص y_1 للمعادلة التفاضلية (3) يحقق:

$$y_1{}^{(n)} = f(x)$$

وبالتالي يمكن أخذه:

$$y_1 = \int dx \int dx \dots . \int f(x). dx = \int \int \dots . \int f(x)\, dx\, dx \dots . dx$$

نكامل n مرة.

وبالمثال يتضح المقال: لتكن المعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y^{(4)} = e^x}$$

الحل: نلاحظ هنا أن:

$y_1 = e^x$ يمثل حل خاص للمعادلة السابقة

ومنه وحسب ما سبق نأخذ التحويل: $y = y_1 + z$ ومنه يكون:

$$z = P_3(x) \ \Rightarrow y = y_1 + P_3(x)$$

ومنه فالحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = y_1 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = e^x + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

المعادلات التفاضلية القابلة لخفض المرتبة:

المعادلة التفاضلية لا تحوي التابع y و لا تحوي مشتقاته حتى المرتبة $k-1$ أي من الشكل:

$$f\left(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \dots (1)$$

حيث بإمكاننا خفض مرتبة هذه المعالة لتصبح مرتبتها $n-k$ وذلك التحويل: $z = y^{(k)}\dots$

وبالتالي تصبح المعادلة بعد التحويل: $f\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0$

فإذا كان الحل العام لها:

$$z = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

فنحصل على المعادلة التفاضلية

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

وهي من النوع (3)

مثال تمهيدي (تبسيط الفقرة التالية) : اوجد حل المعادلة

$$\boldsymbol{y''^2 + 5y'' - 6 = 0}$$

بإمكاننا تحليل هذه المعادلة الى جداء عوامل من الدرجة الاولى للمشتق الثاني لـ y لتصبح

$$\boldsymbol{(y'' - 3)(y'' - 2) = 0}$$

وبما انه جداء عوامل للمشتقات فالحل العام سيكون جداء الحلول لكل عامل

$$y'' - 3 = 0 \Rightarrow y'' = 3 \Rightarrow y' = 3x + c_1 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_0$$

$$y'' - 2 = 0 \Rightarrow y'' = 2 \Rightarrow y' = 2x + c_2 \Rightarrow y_2 = x^2 + c_2x + c_3$$

ومنه فالحل العام هو:

$$y \equiv y_1.y_1 \equiv \left(\frac{3}{2}x^2 - y + c_1x + c_0\right)(x^2 - y + c_2x + c_3) = 0$$

و لنعمم هذه الحالة :

المعادلات التفاضلية من الشكل :

$$y'^n + P_1(x,y)y'^{n-1} + P_2(x,y)y'^{n-2} + \dots + P_{n-1}(x,y)y' + P_n(x,y) = 0$$

يمكن تفريق هذه المعادلة التفاضلية إلى عوامل من الدرجة الأولى في y' اي من الشكل التالي:

$$[y' - f_1(x,y)][y' - f_2(x,y)] \dots \dots [y' - f_n(x,y)] = 0$$

حيث: $f_1, f_2, \dots, f_n$ هي دوال مستمرة في المتغيرين x, y وفي هذه الحالة نحصل على n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى محلولة بالنسبة للمشتق:

$$y' - f_k(x,y) = 0 \quad ; k = 1,2,3, \dots, n$$

وبالتالي علينا ايجاد التكامل العالم لكل معادلة تفاضلية من اجل كل قيمة ل k ومنه نحصل على n تكامل:

$\varphi_1(x, y, c_1) = 0$ تكامل القوس الأول

$\varphi_2(x, y, c_2) = 0$ تكامل القوس الثاني

$\vdots$

$$\varphi_n(x,y,c_n)=0$$

ويكون الحل العام هو (جداء التكاملات ببعضها):

$$F(x,y,c)\equiv\varphi_1(x,y,c_1)\varphi_2(x,y,c_2)\ldots\varphi_n(x,y,c_n)=0$$

و هذه ما فعلناه في مثالنا السابق و اليكم ايضا مثال اخر

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\boldsymbol{y^2y'^2+xyy'-2x^2=0}$$

الحل: لدينا: $a=y^2\,,b=xy\,,c=-2x^2$

$$\Delta=b^2-4ac=x^2y^2-4(y^2)(-2x^2)=x^2y^2+8y^2x^2=9x^2y^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=|3xy|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-xy+3xy}{2y^2}=\dfrac{2xy}{2y^2}=\dfrac{x}{y}\\[2ex] y'_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-xy-3xy}{2y^2}=\dfrac{-4xy}{2y^2}=\dfrac{-2x}{y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(y'-\frac{x}{y}\right)\left(y'+\frac{2x}{y}\right)=0\ldots(*)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'=\dfrac{x}{y}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}\Rightarrow y.dy=x.dx\Rightarrow\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+c_1\ldots(1)\\[2ex] y'=\dfrac{-2x}{y}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{y}\Rightarrow y.dy=-2x.dx\Rightarrow\dfrac{y^2}{2}=-x^2+c_2\ldots(2)\end{cases}$$

بتعويض $(1),(2)$ في $(*)$ نحصل على الحل العام المطلوب:

$$\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}-c_1\right)\left(\frac{y^2}{2}+x^2-c_2\right)=0$$

المعادلة المتجانسة من الشكل:

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0\ldots(1)$$

متجانسة في y ومشتقاته أي تحقق العلاقة:

$$F\left(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'',\ldots,\lambda y^{(n)}\right)=\lambda^kF\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)\ldots(2)$$

وذلك مهما يكن العدد الحقيقي $\lambda \in R^*$

وبأخذ: $\lambda = \frac{1}{y}$ تصبح المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \dots (3)$$

نجري التحويل: $z = \frac{y'}{y}$

$$\Rightarrow y' = z.y$$

$$\Rightarrow y'' = y'z + yz' \underbrace{\Rightarrow}_{y'=zy} y'' = y.z^2 + y.z' \Rightarrow y'' = y(z^2 + z') \Rightarrow \frac{y''}{y} = z^2 + z'$$

$$\Rightarrow y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = zy(z^2 + z') + y(2zz' + z'')$$

$$\Rightarrow y''' = yz^3 + 3yzz' + yz'' = y(z^3 + 3zz' + z'') \Rightarrow \frac{y'''}{y} = z^3 + 3zz' + z''$$

وهكذا بالاشتقاق $(n-1)$ مرة نحصل على $\frac{y^{(n)}}{y}$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{yy'' - y'^2 = 6xy^2}$$

الحل: نقسم الطرفين على $y^2 \neq 0$:

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 6x$$

نجري التحويل: $z = \frac{y'}{y}$ ومنه بالتعويض مما سبق يكون:

$$z^2 + z' - z^2 = 6x \Rightarrow z' = 6x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 6x \Rightarrow dz = 6x.dx$$

بالمكاملة ينتج:

$$z = 3x^2 + c_1$$

بتعويض قيمة z نجد:

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + c_1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى....

لإيجاد الحل العام لها نكتب:

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = (3x^2 + c_1).dx$$

$$\Rightarrow \ ln|y| = x^3 + c_1 x + c_2 \ \Rightarrow y = e^{x^3 + c_1 x + c_2}$$

وهو الحل العام المطلوب.

والأن لنتعرف على معادلة كليرو: هي من الشكل التالي:

$$y = xP + f(P) \dots (1)$$

حيث: $\frac{dy}{dx} = \ y' = P$ لإيجاد الحل لهذه المعادلة نشتق بالنسبة لـx:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = P = P + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\frac{dP}{dx}$$

$$\Rightarrow [x + f'(P)]\frac{dP}{dx} = 0 \dots (*)$$

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx} = 0 \ \Rightarrow P = c \\ \ x + f'(P) = 0 \end{cases}$$

وهاتان المعادلتان الوسيطيتين هما تمثلان حلاً للمعادلة التفاضلية (1) الا أن هذا الحل لا ينتج عن الحل العام وبالتالي يكون حل شاذ.

((الحل العام ينتج بتبديل كل p بـ c))

مثال: أوجد الحل العام والشاذ للمعادلة التفاضلية

$$y = xP + 2P^2$$

هذه المعادلة هي من نوع كليرو ومنه فإن الحل العام: نبدل كل $P = c$

$$y = x.c + 2c^2$$

أمّا الحل الشاذ: لدينا:

$$f(P) = 2P^2 \Rightarrow f'(P) = 4P$$

$$x + f'(P) = 0 \ \Rightarrow x + 4P = 0$$

$$\Rightarrow x = -4P \ \Rightarrow P = -\frac{x}{4}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$y = x\left(-\frac{x}{4}\right) + 2\left(-\frac{x}{4}\right)^2$$

بالإصلاح نجد أنَّ:

$$y = -\frac{x^2}{8}$$

انتهت المحاضرة