التاريخ: 2 /11/ 2016

المحاضرة العاشرة

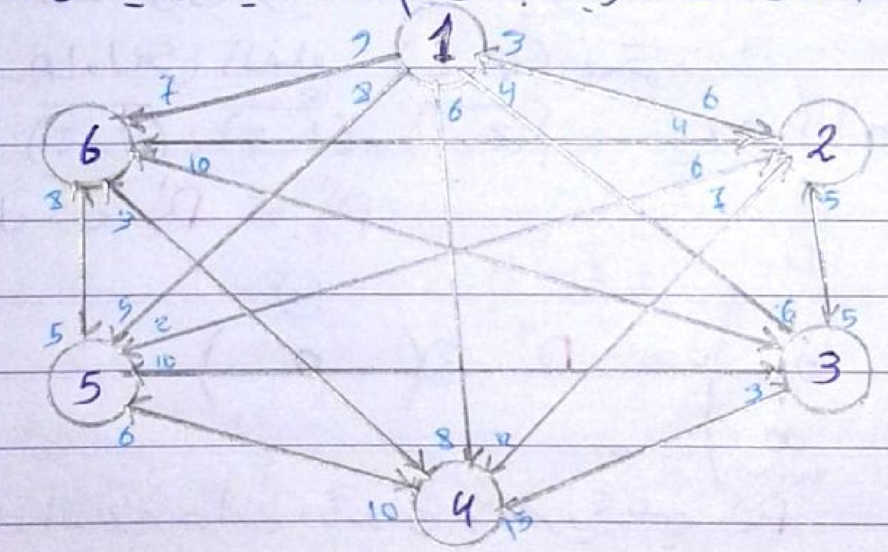
ليكن لدينا البيان G ومصفوفته بالشكل التالي:

$$D = \begin{bmatrix} \infty & 6 & 6 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & \infty & 5 & 12 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & \infty & 15 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & \infty & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 8 & 10 & \infty & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 7 & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

1) ارسم البيان الموافق لهذه المصفوفة

2) أوجد دارة هاملتون الأصغرية باستخدام خوارزمية السياحة الدائرية.

الحل:



نوجد المصفوفة D_0 :

$T(d_{ij}) = d_{ij} - u_i - v_j$

$$D_0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \infty & 2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \infty & 8 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & \infty & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

في المصفوفة D تقوم بإيجاد كل من u_i و v_i حيث u_i هي أصغر قيمة في كل سطر) أي:

$$u_i = \min\{d_{ij}\} \qquad v_i = \min\{(d_{ij} - u_i)\}$$

$u_1 = \min\{\infty, 6, 6, 8, 5, 7\} = 5$

$u_2 = \min\{3, \infty, 5, 12, 4, 10\} = 3$

$u_3 = \min\{4, 5, \infty, 15, 10, 7\} = 4$

$u_4 = \min\{6, 7, 3, \infty, 6, 3\} = 3$

$u_5 = \min\{8, 6, 8, 10, \infty, 8\} = 6$

$u_6 = \min\{2, 4, 2, 7, 5, \infty\} = 2$

$v_1 = \min\{(\infty - 5), (3-3), (4-4), (6-3), (8-6), (2-2)\} = 0$

* نحسب كلفة الدائرة فتكون:

$$C(r_0) = \sum_{i=1}^{6} u_i + \sum_{j=1}^{6} v_j = 5+3+4+3+6+2+0+0+0+3+0+0 = 26$$

وهذه الكلفة هي أصغر أو تساوي الكلفة الأصغرية التي نريد حسابها:

* نوجد الأقواس الموافقة لقيم صفرية وذلك لتقسيم المصفوفة D_0 إلى مصفوفتين D_0' و D_0'':

+ الأقواس التي تحمل قيم صفرية في D_0 هي:

$d_{14}, d_{15}, d_{21}, d_{31}, d_{43}, d_{46}, d_{52}, d_{63}$ (جميعها قيمها صفر 0)

+ نحسب القيم W_{rs} حيث:

$$W_{rs} = \min_{r \neq l} d_{rl} + \min_{l \neq s} d_{ls}$$

(أصغر عنصر في العمود عدا العنصر نفسه) + (أصغر عنصر في السطر الذي يحوي الـ 0 عدا العنصر نفسه أي 0)

$W_{14} = 0 + 1 = 1 \quad W_{15} = 0 + 1 = 1 \quad W_{21} = 0 + 1 = 1 \quad W_{31} = 0 + 1 = 1$

$W_{43} = 0 + 0 = 0 \quad W_{46} = 0 + 2 = \underline{\underline{2}} \quad W_{52} = 1 + 1 = \underline{\underline{2}} \quad W_{63} = 0 + 2 = \underline{\underline{2}}$

+ نختار الضلع الموافق لـ $Max(W_{rs})$ وهذا القوس الذي نختاره نحذفه من قيم المصفوفة إلى مصفوفتين. وقيم الـ Max هي d_{46}, d_{52}, d_{63} نختار أحدها وليكن $(5, 2)$.

نقسم المصفوفة D_0 إلى مصفوفتين كما يلي:

$\{(\overline{5,2})\} \subseteq r_0'$, $\{(5,2)\} \subseteq r_0''$

$\downarrow D_0'$ $\qquad\qquad$ $\downarrow D_0''$

$$D_0' = \begin{array}{c|cccccc|l} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & \infty & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & u_1=0 \\ 2 & 0 & \infty & 2 & 6 & 1 & 7 & u_2=0 \\ 3 & 0 & 1 & \infty & 8 & 6 & 3 & u_3=0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & \infty & 3 & 0 & u_4=0 \\ 5 & 2 & \infty & 2 & 1 & \infty & 2 & u_5=1 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 2 & 3 & \infty & u_6=0 \\ & v_1=0 & v_2=1 & v_3=0 & v_4=0 & v_5=0 & v_6=0 & \end{array}$$

$$D_0'' = \begin{array}{c|ccccc|l} & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & \infty & 1 & 0 & 0 & 2 & u_1=0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & \infty & 7 & u_2=0 \\ 3 & 0 & \infty & 8 & 6 & 3 & u_3=0 \\ 4 & 3 & 0 & \infty & 3 & 0 & u_4=0 \\ 6 & 7 & 0 & 2 & 3 & \infty & u_6=0 \\ & v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=0 & v_6=0 & \end{array}$$

حذفنا السطر الخاص والعامود الثاني

+ نحسب كلفة كل من D_0' , D_0'' ونختار المصفوفة ذات الكلفة الأصغرية:

$$C(r_0') = C(r_0) + \sum_{D_0'} u_i + \sum_{D_0'} v_j = 26 + 2 = 28$$

$$C(r_0'') = C(r_0) + \sum_{D_0''} u_i + \sum_{D_0''} v_j = 26 + 0 = 26$$

إذاً نختار المصفوفة D_0'' الموافقة لـ r_0'' ونعيد تطبيق الخوارزمية عليها:

+ نوجد المصفوفة D_1 المخفضة حسب التطبيق: $\quad T(d_{ij}) = d_{ij} - u_i - v_j$

(لاحظ أن D_1 هي نفسها D_0'')

نحسب العناصر حسب العلاقة ↑

D_1

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} ① & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\
D_1 = \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑥ \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 6 & \infty & 7 \\
0 & \infty & 8 & 6 & 3 \\
3 & 0 & \infty & 3 & 0 \\
7 & 0 & 2 & 3 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

نحدد العناصر الصفرية في المصفوفة D_1 وهي:

$d_{14}, d_{15}, d_{21}, d_{31}, d_{43}, d_{46}, d_{63}$

نحسب w_{rs} للعناصر الصفرية السابقة:

$W_{14} = 2, \ W_{15} = \underline{\underline{3}}, \ W_{21} = 2, \ W_{31} = \underline{\underline{3}}, \ W_{43} = 0, \ W_{46} = 2, \ W_{63} = 2$

نختار $(3,1)$ ونوجد المصفوفتين D_1', D_1'' حيث:

$\{\overline{(5,2)}, \overline{(3,1)}\} \subseteq r_1' \rightarrow D_1' \quad , \quad \{(5,2),(3,1)\} \subseteq r_1'' \rightarrow D_1''$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccc} ① & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} & \\
D_1' = \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑥ \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 6 & \infty & 7 \\
\infty & \infty & 8 & 6 & 3 \\
3 & 0 & \infty & 3 & 0 \\
7 & 0 & 2 & 3 & \infty
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 3 \\ u_4 = 0 \\ u_6 = 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc} v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=0 & v_6=0 \end{array} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cccc} ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} & \\
D_1'' = \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ④ \\ ⑥ \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 0 & 0 & 2 \\
2 & 6 & \infty & 7 \\
0 & \infty & 3 & 0 \\
0 & 2 & 3 & \infty
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_4 = 0 \\ u_6 = 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} v_3=0 & v_4=0 & v_5=0 & v_6=0 \end{array} &
\end{array}
$$

$C(r_1') = C(r_0'') + \sum_{D_1'} u_i + \sum_{D_1'} v_j = 26 + 3 = 29$

$C(r_1'') = C(r_0'') + \sum_{D_1''} u_i + \sum_{D_1''} v_j \quad 26 + 2 = 28$

نختار المصفوفة D_1'' (لأن لها حلقة أقل) ونطبق الخوارزمية عليها من جديد:

+ نوجد المصفوفة D_2 وفق التطبيق T : $T(d_{ij}) = d_{ij} - u_i - v_j$

$$D_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & \infty & 5 \\ 0 & \infty & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

+ العناصر الصفرية هي: $d_{14}, d_{15}, d_{23}, d_{43}, d_{46}, d_{63}$

نحسب W_{rs} فيكون: $W_{14}=2, W_{15}=3, \underline{\underline{W_{23}=4}}, W_{43}=0, W_{46}=2, W_{63}=2$

نختار القوس $(2,3)$ ونوجد D_2', D_2'' كما يلي:

$\{(\overline{5,2}), (\overline{3,1}), (\overline{2,3})\} \subseteq r_2' \to D_2'$ ، $\{(5,2),(3,1),(2,3)\} \subseteq r_2'' \to D_2''$

$$D_2' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 2 \\ \infty & 4 & \infty & 5 \\ 0 & \infty & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 & v_4=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ u_1=0 \\ u_2=4 \\ u_3=0 \\ u_4=0 \\ \\ \end{array}$$

$$D_2'' = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 0 \\ 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

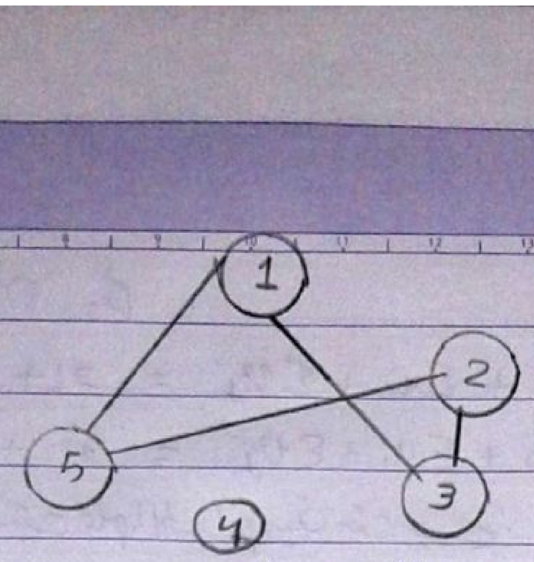
ملاحظة: وضعنا ∞ في العنصر الثاني في السطر الأول لأننا قمنا باختيار الأضلاع:
$(5,2), (3,1), (2,3)$

ولو قمنا بوضع قيمة d_{15} كما هي $\underline{0}$ (القيمة الحقيقية المرافقة لها) فإنه سيكون لدينا مشكلة لأن دارة هاملتون ستصبح مغلقة دون المرور بالعقدتين 4 و 6 وهذا تناقض وغير ممكن لأن دارة هاملتون يجب أن تمر بجميع عقد البيان لذلك نضع ∞ بدلاً عن القوس $(1,5)$

(لا يعتبر بيان هاملتون)

(لم يتم جمع العقد)

شكل توضيحي



نحسب كلفة كل من D_2' , D_2''

$$C(r_2') = C(r_1'') + \sum_{D_2'} u_i + \sum_{D_2'} v_i = 32$$

$$C(r_2'') = C(r_1'') + \sum_{D_2''} u_i + \sum_{D_2''} v_i = 28 + 2 + 1 = 31$$

نختار الدارة ذات الكلفة الأصغرية أي

$$\min \{ C(r_2') , C(r_2'') \} = 31$$

أي نختار المصفوفة D_2'' ونطبق عليها الخوارزمية من جديد.

نوجد المصفوفة D_3 وفق التطبيق T: $T(d_{ij}) = d_{ij} - u_i - v_j$

$$D_3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty & 2 \\ \infty & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

العناصر الصفرية في D_3 هي: d_{14} , d_{46} , d_{64} , d_{65}

نوجد w_{rs} للعناصر الصفرية السابقة فيكون:

$w_{14} = 2$ $\quad w_{46} = \underline{\underline{4}}$ $\quad w_{64} = 0$ $\quad w_{65} = 2$

نختار الـ max لـ (w_{rs}) أي نختار القوس $(4,6)$ ونوجد D_3' , D_3'' كما يلي:

$$\{ (\overline{5,2}) , (\overline{3,1}) , (\overline{2,3}) , (\overline{4,6}) \} \subseteq r_3' \to D_3'$$

$$\{ (5,2) , (3,1) , (2,3) , (4,6) \} \subseteq r_3'' \to D_3''$$

$$D_3' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 6 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty & 2 \\ \infty & 2 & \infty \\ 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1=0 & v_2=0 & v_3=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ u_1=0 \\ u_2=2 \\ u_3=0 \\ \\ \end{array} \quad , \quad D_3'' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 6 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_1=0 & v_2=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ u_1=0 \\ u_2=0 \\ \\ \end{array}$$

نحسب كلفة كلا من D_3', D_3'' :

$$C(r_3') = C(r_2'') + \sum u_i + \sum v_j = 31 + 4 = 35$$

$$C(r_2'') + \sum u_i + \sum v_j = 31 + 0 = 31$$

نختار المصفوفة D_3'' ونطبق عليها الخوارزمية من جديد:

$$D_4 = \begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \infty \\ 6 & \infty & 0 \end{array}$$

العناصر الصفرية هي: d_{14}, d_{65}

نحسب W_{rs} فيكون: $W_{14} = \infty$ ، $W_{65} = \infty$

نختار الـ $\max\{W_{rs}\}$ ، وليكن W_{65} أي نختار القوس $(6,5)$:

ونوجد D_4', D_4'' كما يلي:

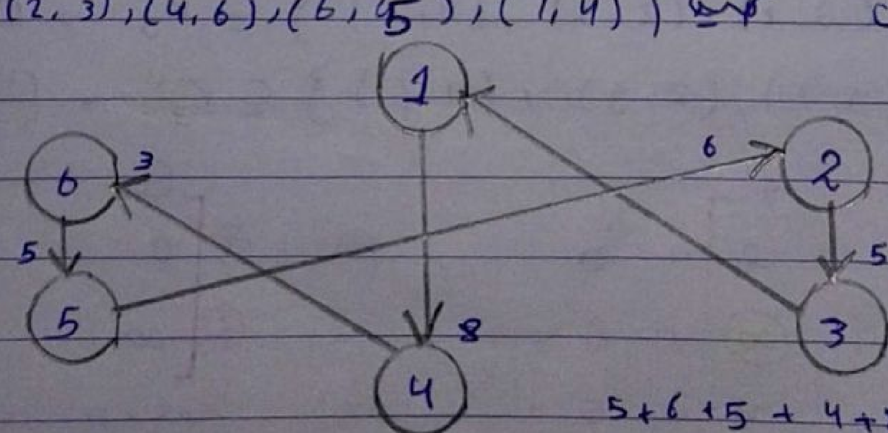
$$\{(5,2),(3,1),(2,3),(4,6),(6,5)\} \subseteq r_4' \rightarrow D_4'$$

$$\{\overline{(5,2)},\overline{(3,1)},\overline{(2,3)},\overline{(4,6)},\overline{(6,5)}\} \subseteq r_4'' \rightarrow D_4''$$

$$D_4' = \begin{array}{c|cc|c} & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 0 & \infty & u_1=0 \\ 6 & \infty & \infty & u_2=0 \\ \hline & v_1=0 & v_2=0 & \end{array} \quad , \quad D_4'' = \begin{array}{c|c|c} & 4 & \\ \hline 1 & 0 & u_1=0 \\ \hline & v_1=0 & \end{array}$$

نختار المصفوفة D_4'' ، وبما أن فيها عنصر وحيد وهو ذو قيمة صفرية فإننا نختار القوس المقابلة له أي نختار $(1,4)$ وتكون الأضلاع التي اخترناها هي:

$\{(5,2),(3,1),(2,3),(4,6),(6,5),(1,4)\}$ وهي دائرة هاملتون



كلفة الدائرة $5+6+5+4+8+3=31$

^_^ انتهت المحاضرة العاشرة ^_^