Syria Math

جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة :الخامسة

التاريخ : ٢٧/١٠/٢٠١٦

إعداد : منى + فاطمة

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

المحاضرة الثانية | جبر خطي (1) | [illegible] | * ملاحظة

قامت الدكتورة بمراجعة التحويلات السطرية.

مثال

$$A=\begin{bmatrix}0&2\\4&5\end{bmatrix}\underset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim}\begin{bmatrix}4&5\\0&2\end{bmatrix}\underset{R_2\to R_2+5R_1}{\sim}\begin{bmatrix}4&5\\20&27\end{bmatrix}=A_1$$

ومنه نجد أن $A\sim A_1$ متكافئتان سطرياً.

$$B=\begin{bmatrix}7&3&2\\2&1&-1\end{bmatrix}\underset{C_2\leftrightarrow C_3}{\sim}\begin{bmatrix}7&2&3\\2&-1&1\end{bmatrix}\underset{C_2\to C_2-C_1}{\sim}\begin{bmatrix}7&-5&3\\2&-3&1\end{bmatrix}=B_1$$

ومنه نجد أن المصفوفتان $B\sim B_1$ متكافئتان عمودياً

* تعريف المصفوفة المدرجة:

نقول عن مصفوفة $A\in M_{m\times n}(F)$ إنها مصفوفة مدرجة إذا حققت:

1) العنصر غير الصفري في كل سطر هو ما ندعوه العنصر الرائد.
2) العنصر الرائد لكل سطر غير صفري يقع على يمين العنصر الرائد الذي يسبقه
3) الأسطر الصفرية تلي الأسطر غير الصفرية

* تعريف مصفوفة مدرجة مختزلة:

نقول عن مصفوفة $A\in M_{m\times n}(F)$ إنها مدرجة مختزلة إذا كانت مدرجة

1) مصفوفة مدرجة
2) العنصر الرائد في كل سطر هو العنصر غير الصفري الوحيد في عموده

مثال

$$A_1=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

هي مدرجة ولكنها ليست مختزلة

$$A_2=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ليست مدرجة

$$A_3=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مدرجة مختزلة

* ملاحظة: العنصر الرائد هو الواحد.

$$A_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ليست مدرجة

لا يقع على يمين عنصر الرائد

$$\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\text{مدرجة}$$

مثال: أوجد المصفوفة المدرجة المختزلة المكافئة للمصفوفة A حيث

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&-1&3\\2&0&1&2\\0&1&1&4\end{bmatrix}\underset{R_2\to -2R_1+R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&-2&-1&3\\0&4&3&-4\\0&1&1&4\end{bmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&-1&3\\0&1&1&4\\0&4&3&-4\end{bmatrix}\underset{R_3\to -4R_2+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&-2&-1&3\\0&1&1&4\\0&0&-1&-20\end{bmatrix}\underset{R_3\to -R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

وهي ≈

$$\xrightarrow{R_1 \to 2R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1-R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مدرجة مختزلة

*ملاحظة: إن كل مصفوفة $A \in M_{m\times n}$ معرفة على الحقل F وذات رتبة $m\times n$ تكافئ مصفوفة مدرجة مختزلة يكون لها الرتبة $m\times n$ نفسها

*تعريف / رتبة مصفوفة /:

نعرف رتبة مصفوفة A أنها تساوي عدد الأسطر غير الصفرية في المصفوفة المدرجة المختزلة المكافئة للمصفوفة A ونرمز لها بـ $rank(A)$

تذكرة:

مرتبة A $m\times n$

رتبة A $rank(A)$ عدد الأسطر غير صفرية

مثال: أوجد رتبة المصفوفة في المصفوفة السابقة:

وهي تساوي 3

المحددات / تعريف /:

لتكن A مصفوفة مربعة ذات مرتبة n ومعرفة على الحقل F ونرمز للمصفوفة الجزئية من A والناتجة عن حذف سطر i والعمود j من المصفوفة A بالرمز A_{ij}

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ مصفوفة جزئية من A ناتجة

عن حذف السطر الثاني، العمود الثالث.

*تعريف:

المحدد من الرتبة n و المصفوفة $A \in M_n(F)$ من المرتبة n معرفة على الحقل F بأنه التطبيق:

$$\det : M_n(F) \longrightarrow F:$$

المعرف كما يلي:

1) إذا كان $n=1$ فإن:

$$\forall A \in M_1(F) : \det(A) = a_{11}$$

حيث $A = (a_{11})$

2) إذا كان $n>1$ فإن:

$$\forall A = (a_{ij}) \in M_n(F) :$$

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det A_{12} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

تسمى هذه العملية بـ نشر المحدد وفق سطره الأول

مثال:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\det(A_1) = 1(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

اوجد المحددة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 (1) \det(A_{11}) + (-1)^3 \det(A_{12}) +$$

$$+ (-1)^4 (-1) \det(A_{13}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+1) - 0 - (-2-1) = 5$$

★ انتهت المحاضرة ★