نظرية الاحتمالات

محاضرة 15 / /

<< الفصل السادس >>

الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية:

1- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي متقطع ولدالة في المتغير العشوائي المنفصل:

* تعريف: ليكن لدينا Y متغيراً عشوائياً متقطعاً (منفصلاً) دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ عندئذٍ نعرف التوقع الرياضي لـ Y بالشكل:

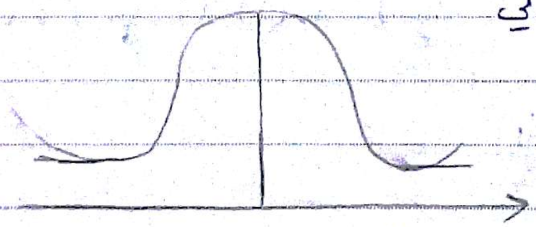
$$\boxed{E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y\, f_Y(y)}$$

من أجل كل القيم الممكنة لـ Y وذلك بشرط أن:

$$\boxed{\sum_{y \in R_Y} |y|\, f_Y(y) < +\infty}$$

أي أننا نقول أن توقع Y موجود إذا كان $\sum_{y} |y|\, f_Y(y) < +\infty$

• إن $E(Y)$ تمثل متوسط القيم التي يأخذها Y على المدى الطويل أي متوسط من البيانات الموافقة لـ Y إذا كررنا التجربة عدد كبير من المرات وأيضاً تمثل $E(Y)$ الموقع على المحور الأفقي ox والتي يتركز حولها التوزيع الاحتمالي لـ Y ولذلك هذه القيمة تسمى متوسط التوزيع الاحتمالي



مثال: $\boxed{*}$ ليكن Y متغيراً عشوائياً جدول كثافته:

y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عين توقع Y : $E(Y)$

الحل: $E(Y) = \sum_{y} y\, f_Y(y)$

$$= (0)\left(\frac{1}{8}\right) + (1)\left(\frac{3}{6}\right) + (2)\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{12}{8} = 1{,}5$$

تعريف: ليكن Y متغيراً عشوائياً متقطعاً كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ ولتكن $g(Y)$ دالة في Y عندئذٍ نعرف التوقع:

$$E(g(Y)) := \sum_{y \in R_Y} g(y)\, f_Y(y)$$

بشرط أن يكون:

$$\boxed{\sum_{y \in R_Y} |g(y)|\, f_Y(y) < +\infty}$$

شرط وجود التوقع

مثال: في المثال $\boxed{*}$ السابق أوجد $E(Y^2)$

الحل:

$$EY^2 := \sum_{y \in R_Y} y^2 f_Y(y)$$

$$= (0)^2\left(\frac{1}{8}\right) + (1)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (3^2)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{24}{8} = 3$$

تمرين: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y(y+1)} & ; \ y = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل لـ Y توقع ؟

الحل: حتى يكون لـ Y توقع يجب أن يتحقق $\sum_y |y| f_Y(y) < +\infty$

ولكن: $\sum_y |y| f_Y(y)$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} |y| \cdot \frac{1}{y(y+1)} \overset{y>0}{=} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y+1}$$

وهي متسلسلة متباعدة أي أن $\sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y+1} = +\infty$

وبالتالي ليس لـ Y توقع منته.

- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر ولدالة منه:

تعريف: ليكن Y متغيراً عشوائياً مستمراً كثافة الاحتمالية $f_Y(y)$ و $g(Y)$ دالة في Y عندئذ يكون:

$$E(Y) := \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

$$E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f_Y(y)\, dy$$

ويكون هذا التوقع موجود إذا تحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f_Y(y)\, dy < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, f_Y(y)\, dy < +\infty$$

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً له الكثافة:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ; \quad y \in [2, 5] \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين EY و EY^2 و $E(Y+1)$

الحل :

$$E(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} y \, f_y(y) \, dy$$

يساوي بالتعريف

$$= \int_{2}^{5} y . \left(\frac{1}{3}\right) dy$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^5 = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$E(y^2) := \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_y(y) \, dy$$

$$= \int_{2}^{5} y^2 \left(\frac{1}{3}\right) . dy$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{y^3}{3}\right]_2^5 = 13$$

$$E(y+1) := \int_{-\infty}^{+\infty} (y+1) \, f_y(y) \, dy$$

$$\int_{2}^{5} (y+1) \left(\frac{1}{3}\right) dy$$

$$\Rightarrow E(y+1) = \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2} + y\right]_2^5 = \frac{9}{2} = 4,5$$

- خواص التوقع :

① $E(C) = C \quad ; \forall C \in R$

② $E(c.X) = c . E(X)$

③ $E\left(\sum g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{k} E(g_i(x))$

④ $|E(X)| \leq E|X|$

⑤ إذا كان $a \leq X \leq b$ فإن

$a \leq E(X) \leq b \quad ; a . b \in R$

⑥ $E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$

7) إذا كان $X \geq 0$ فإن $E(X) \geq 0$

8) إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين توقعهما موجود أي أن ($E|X| < +\infty$ و $E|Y| < +\infty$) فإنه إذا كان:

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

9) إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة (أي أن $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$)

ولكل منها توقع موجود وأيضاً توقع $\prod_{i=1}^{n} X_i$ موجود فإن:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

10) إن عكس الخاصة 9 ليس صحيحاً بشكل عام أي يمكن أن يكون:

$$E(X_1 . X_2) = E(X_1) . E(X_2)$$

دون أن يكونا مستقلان عشوائياً.

11) $E(X^2) \neq E(X)^2$

مبرهنة: ليكن X ، Y متغيرين عشوائيين عندئذٍ إذا كانا مستقلان عشوائياً فإن: $E(X.Y) = EX . EY$

البرهان: ((البرهان مطلوب))

سيتم هنا عندما نأخذ التوزع لشعاع عشوائي:

تمرين: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية:

$$f_Y(y) = \frac{y}{10} \quad , \quad y = 1, 2, 3, 4$$

أثبت أن $f_Y(y)$ دالة كثافة احتمالية ثم عين $E(Y(Y-5))$

الحل: تكون f_Y دالة احتمالية كثافة إذا حققت الشرطان:

1) $f_Y(y) \geq 0$ ((محقق))

2) $\sum_y f_Y(y) \overset{?}{=} 1$

$$\Rightarrow \sum_y f_Y(y) = \sum_{y=1}^{4} \frac{y}{10} = \frac{1+2+3+4}{10} = 1 \quad \text{((محقق))}$$

$$E(y(y-5)) = E(y^2 - 5y)$$

وحسب خواص التوقع :

$$= \boxed{E y^2 - 5 E y}$$

$$\Longrightarrow E y = \sum_y y f_y(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{4} y \frac{y}{10} = \sum_{y=1}^{4} \frac{y^2}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$E y^2 = \sum_y y^2 f_y(y) = \sum_{y=1}^{4} \frac{y^3}{10}$$

$$= \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

فيكون :

$$E(y(y-5)) = E y^2 - 5 \cdot E y$$

$$10 - 5(3) = -5$$

نتيجة : إن احتمال أي حدث A من F في الفضاء (Ω, F, P) يمثل توقع دالة الحدث (الدالة المميزة للحدث A) نفسه

أي : $E(\mathbb{1}_A)$

حيث :

$$\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1 & ; \; w \in A \\ 0 & ; \; w \notin A \end{cases}$$

أي أن : $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$

وذلك لأن : دالة الحدث تمثل متغير عشوائي له جدول الكتابة :

$\mathbb{1}_A$	1	0	مجموع
P_i	$P(A)$	$1 - P(A)$	1

$$\Longleftarrow \quad E(\mathbb{1}_A) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{1}_A \, P_i$$

$$= (1) \cdot P(A) + (0)(1 - P(A)) = P(A)$$