Syria Math

تحليل ١

الأستاذة : علا أسبر

المحاضرة :الأولى

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٨

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة الأولى عملي ٢٠١٦/١١/١٨م

الاستقراء الرياضي..

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

الحل.

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n=1$

$$\left.\begin{aligned} \ell_1 &= \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 \\ \ell_2 &= \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

نفرض أنها صحيحة من أجل $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

نثبت أن القضية صحيحة من أجل $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

طريقة الحل.

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\ell_1 = \frac{(k+1)}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\left[2k^2 + 7k + 6\right]$$

$$\Rightarrow = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \ell_2$$

أثبت صحة العلاقة التالية بطريقة الاستقراء الرياضي:

يقبل القسمة على 6:

$$S_n = n(n+1)(2n+1)$$

الحل.

من أجل $n=1$:

$$S_1 = 1(1+1)(2+1) = 6$$

يقبل القسمة على 6

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k$

$$S_k = k(k+1)(2k+1)$$

يقبل القسمة على 6

نثبت أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$

$$S_{k+1} = (k+1)(k+2)(2k+3)$$

يقبل القسمة على 6

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1)(k+2)(2k+3) \\ &= k(k+1)(2k+3) + 2(k+1)(2k+3) \\ &= k(k+1)(2k+1+2) + 2(k+1)(2k+3) \\ &= k(k+1)(2k+1) + 2k(k+1) + 2(k+1)(2k+3) \\ &= S_k + 2(k+1)(k+2k+3) \\ &= S_k + 2(k+1)(3k+3) \\ &= S_k + 6(k+1)^2 \end{aligned}$$

بما أن $6(k+1)^2$ يقبل القسمة على 6 و S_k يقبل القسمة على 6 فإن S_{k+1} يقبل القسمة على 6

أثبت أنه $S_n = n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 : $n \in N^*$

ن أجل $n=1$

يقبل القسمة على 3 ؛

$S_1 = 1 - 1 = 0$

نفرض أن القضية صحيحة ن أجل $n=k$

$S_k = k^2 - k$ يقبل القسمة على 3

نثبت أن $n=k+1$

$S_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$ يقبل القسمة على 3 :

$S_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$

$= k^3 - k + 3k^2 + 3k$

$= S_k + 3(k^2 + k)$

S_k يقبل القسمة على 3 ، $3(k^2+k)$ يقبل القسمة على 3

$\Longrightarrow S_{k+1}$ يقبل القسمة على 3

أثبت صحة العلاقة ن الشكل :

$2^n > 2n+1$ حيث $n \geqslant 4$

نفرض ن أجل $n=4$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 = 2^4 = 16 \\ \ell_2 = (2)(4) + 1 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 > \ell_2$$

نفرض ن أجل $n=k$

$2^k > 2k+1$

نثبت ن أجل $n=k+1$

$2^{k+1} > 2k+3$

نضرب بـ 2 : $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1)$

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k+2$

$= 2k + 2k + 2 > 2k+1+2$

$= 2k+3$

طريقة 2)

$4k+2 > 2k+3$

$2k > 1$

أثبت أن $n! < n^n$ ؛ $n \geqslant 2$

نفرض ن أجل $n=2$

$2! > 4$

نفرض $k! < k^k$

نثبت ن أجل $n=k+1$

$(k+1)! < (k+1)^{(k+1)}$

نضربه بـ k :

$(k+1)! = (k+1) \cdot k! < (k+1)k$

$< (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{k+1}$

متراجحات :

1) $|2x - 4| < 2$

$-2 < 2x - 4 < 2$

$+2 < 2x < 6$

$1 < x < 3$

$x \in]1, 3[$

2) $|2x - 4| = 2$

نأخذ الحالتين $x \in \{1, 3\}$

$2x - 4 = 2 \Rightarrow 2x = 6 \xRightarrow{\text{إما}} x = 3$

$2x - 4 = -2 \Rightarrow 2x = 2 \xRightarrow{\text{أو}} x = 1$

3) $|x| = x+5$

$-x = x+5 \Rightarrow 0 = 5$ مستحيل

$x = x+5 \Rightarrow 2x = -5$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

حل وحيد $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

4) $|x| = x-5$

بتربيع طرفي المعادلة نجد أن:

$x^2 = x^2 - 10x + 25$

وبحل هذه المعادلة نجد أن $x = \frac{5}{2}$ ولكن بالتعويض في المعادلة المدروسة نجد أن $\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$ وهذا غير ممكن

إي مجموعة حلول المعادلة هي $\emptyset$

5) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

أولاً: لندرس قيمة المقدار الواقع في الطرف الأيمن
متى يكون سالب

	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$	$-\infty$	+	0	−	0	+	$+\infty$

من أجل أن تكون المتراجحة صحيحة يجب أن يكون $x \in]3,4[$ إي حلول المتراجحة المعطاة هي المجال $]3,4[$

ويمكن ملاحظة ذلك من خلال رسم الخط البياني للتابع $x^2-7x+12$ تكون صورة المجال $]3,4[$ أي تحت محور العوامل.

6) $|x-2| < 10$

$10 < x-2 < -10$

$-8 < x < 12$

$x \in [-8, 12]$

7) $|x| > |x+1|$

بتربيع الطرفين

$x^2 > (x+1)^2$

$x^2 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 0 > 2x+1$

$\Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

8) $|x+2| - |x| > 1$

$|x+2| > 1 + |x|$

نربع الطرفين

$(x^2 + 4x + 4 > 1 + 2|x| + x^2$

$\Rightarrow 4x + 3 > 2|x|$

$\Rightarrow 16x^2 + 24x + 9 > 4x^2$

$12x^2 + 24x + 9 > 0$

$4x^2 + 8x + 3 > 0$

$(2x+1)(2x+3) > 0$

$2x+1 > 0$ أو $2x+3 > 0$

$x > -\frac{1}{2}$ أو $x > -\frac{3}{2}$

والحل $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$