# التحليل العددي 1

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : العاشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/١٣

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

Syria Math

## مرحبا اصدقائي

في ظلّ مشوارنا معكم زملائي نكمل بحث الاستيفاء بكثيرات الحدود وقد أخذنا مسبقاً طريقة لاغرانج وطريقة نيوتن

أمّا في محاضراتنا هذه سنتعرّف على طريقة هرميت

لنبدأ:

معلومة ع السريع: الاستيفاء تطبيق مهم في معالجة الصور أي يستطيع الاستيفاء أن يقرّب ويظهر لنا الصّور غير الواضحة

**طريقة هرميت**: بفرض $f \in [a,b]$ وَ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ أعداد مختلفة، عندئذٍ فإنّ الحدوديّة الوحيدة التي درجتها أقل ما يمكن وتتّفق مع f وَ $f'$ بالنقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ هي حدوديّة هرميت من الدّرجة $2n+1$ لأنّ

بطريقة نيوتن كان لدينا $n+1$ نقطة والحدودية أقل بدرجة أي نأخذ $p_n$ فقط و $n+1$ لا تظهر

حيث عندما كان $\underbrace{(x_0, y_0)}_{n+1}$

أمّا بطريقة هرميت يدخل معنا المشتق $\underbrace{(x_0, y_0, y_0')}_{(n+1)+(n+1)}$

Syria Math

نقوم بجمع $(n+1)+(n+1) = 2n+2$

وبالتّالي فإنّ $2n+2$ لا تظهر بالحدوديّة إنما يظهر أقل منها بدرجة وبالتالي ستكون درجة الحدوديّة $2n+1$

وتكون شكل الحدوديّة بعد الاستنتاج:

$$H_{2n+1} = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1) + a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots + a_{2n+1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_{n-1})$$

فكرة طريقة الحلّ بطريقة هرميت من خلال هذا الجدول أي هذا الجدول للفهم فقط

| $x_i$ | $y_i$ | الفروق المقسومة الأولى | الفروق المقسومة الثّانية | الفروق المقسومة الثّالثة |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | | | |
| | | $\frac{y_0-y_0}{x_0-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=y_0'$ | | |
| $x_0$ | $y_0$ | | $\frac{\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-y_0'}{x_1-x_0}$ | |
| | | $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ | | $\frac{y_1'-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}$ $\frac{y_1'-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}$ |
| $x_1$ | $y_1$ | | $\frac{y_1'-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}$ | |
| | | $\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1}=y_1'$ | | |
| $x_1$ | $y_1$ | | | |

**شرح مبسط عن الجدول وطريقة عرض السّؤال:** نلاحظ أنه في $x_i$ و $y_i$ قمنا بتكرار النقط أي نكرر كل نقطة مرّتين فقط ولاحظنا عندما طبّقنا الفروق المقسومة كان الجواب غير منطقي بالعمود الثّالث لذلك لجئنا إلى تعريف المشتق ونتج معنا مشتق في السّطر الثّاني والسادس بالعمود الثّالث أمّا في السطر الرّابع بالعمود الثّالث لم يكن هناك اشكالية عند تطبيق الفروق المقسومة ونكمل باقي الجدول على طريقة الفروق المقسومة...

أمّا طريقة عرض السّؤال فسيكون لدينا ثلاثة معطيات وهي قيم $x_i$ وَ $y_i$ وقيم المشتق $y'$ وبذلك لا يبقى علينا سوى تطبيق قانون الفروق المقسومة. ☺

علماً أن هذا الجدول لا نستفيد منه إلّا بإخراج قيم $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ وعندما نعرف قيمهم نطبق قانون الحدوديّة

**ملاحظة :** بالنسبة لطريقة هرميت يأتي السؤال بشكلين مختلفين **الشكل الأول** :تكون المعطيات في السؤال من خلال جدول يتضمن قيم $(f,f')$ كما في المثال (١) **الشكل الثاني** :تعطى من خلال تابع ويجب علينا إيجاد المشتق وتعويض القيم فيه كما في المثال (٢)

**مثال (١)** أوجد تقريباً لـ $f(0,434)$ باستخدام حدوديّة هرميت الموافقة للبيانات الواردة في الجدول الآتي:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,3 | 0,29552 | 0,95534 |
| 1 | 0,32 | 0,31457 | 0,94924 |
| 2 | 0,35 | 0,34290 | 0,93937 |

$$H_{2n+1} = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1) + a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + a_5(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)$$

| $x_i$ | $f(x_i)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 0,29552 | | | | | |
| | $a_0$ | $a_1$ 0,95534 | | | | |
| 0,3 | 0,29552 | | $a_2$ $\frac{0,95250-0,95534}{0,32-0,3} = -0,142$ | | | |
| | | $\frac{0,31457-0,29552}{0,32-0,3} = 0,95250$ | | $a_3$ $\frac{-0,163+0,142}{0,32-0,3} = -1,505$ | $a_4$ | |
| 0,3 | 0,31457 | | $\frac{0,94924-0,95250}{0,32-0,3} = -0,163$ | | $\frac{-0,013332+1505}{0,35-0,3} = 20,7336$ | |
| | | 0,94924 | | $\frac{-0,1636666+0,163}{0,35-0,3} = -0,013332$ | | $a_5$ $\frac{-0.44492+20,7336}{0,35-0,3} = -431.55704$ |
| 0,3 | 0,31457 | | $\frac{0,94433-0,94924}{0,35-0,32} = -0,1636666$ | | $\frac{-0,055566+0,013332}{0,35-0,3} = -0.44492$ | |
| | | $\frac{0,3429-031457}{0,35-0,32} = 0,94433$ | | $\frac{-0,16533+0,1636666}{0,35-0,32} = -0,0555566$ | | |

Syria Math

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 0,34290 | | $\frac{0,93937-0,94433}{0,35-0,32}=-0,165533$ | | | |
| | | 0,93937 | | | | |
| 0,3 | 0,34290 | | | | | |

وعليه فإنّ:

$$H_5 = a_0 + (x-x_0)a_1 + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^2(x-x_1) + a_4(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + a_5(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)$$

$$H_5 = 0,29552 + (x-0,3)(0,95534) + (-0,142)(x-0,3)^2 + (-1,505)(x-0,3)^2(0,32) + (20,7336)(x-0,3)^2(x-0,32)^2 + (-431.55704)(x-0,3)^2(x-0,32)^2(x-0,35) = 0,3334888$$

$$f(0.34) \approx H_5(0.34) = 0.3334888$$

**ملحوظة:** نعوض كل x في الحدودية بـ 0.34

**ملاحظة:** لتعويض قيمة x في الحدودية يمكن كتابة أي حدودية أو (أي دالة)على الآلة الحاسبة ومن ثم الضغط على زر calc ومن ثم تعويض القيمة فوراً و ذلك من أجل أغلب الآلات الحاسبة السائد استعمالها

## صيغة الخطأ لحدودية الاستيفاء لهرميت:

نفس صيغة الخطأ في طريقة لاغرانج مع حساب $P_n$ بالشكل :

أ- إذا كانت المسافات متساوية

$$\max P = \left[\frac{h^{n+1}}{4}(n!)\right]^2$$

حيث h هي مقدار الخطوة بين النقاط $(x_n - x_{n-1})$

ب - إذا كانت النّقاط مختلفة البعد نعوّض

$$H_{2n+2} = (x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots\dots (x-x_{2n+1})^2$$

مثال (٢)

لتكن لدينا النقاط التالية :

أوجد الحدودية استيفاء هرميت لهذه النقاط إذا علمت أن $x_i = -1,0,1$

ثم أوجد قيمة f عند النقطة $x = 0.5$ والخطأ الفعلي المرتكب $f(x) = x^4 + 1$

$$f'(x) = 4x^3$$

| $i$ | $x_i$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | 2 | | | | | |
| | | | $-4$ | | | | |
| 0 | $-1$ | 2 | | 3 | | | |
| | | | $-1$ | | $-2$ | | |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | | 1 | |
| | | | 0 | | 0 | | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | | 1 | |
| | | | 1 | | 2 | | |
| 2 | 1 | 2 | | 3 | | | |
| | | | 3 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | | | | | |

أصبحت الحدودية

$$H_5 = 2 + (-4)(x+1) + 3(x+1)^2 + (-2)(x+1)^2(x) + (1)(x+1)^2x^2$$

قيمة الدالة عند $x = 0.5$ هي

$$f(0.5) \approx H_5(0.5) = 1.0625$$

نعوض في الدالة نفسها $f(0.5) = 1.0625 = T$

$$E_{exact} = |T - Q| = 0$$

## "تمارين وظيفة"

١) أوجد كثيرة حدود الاستيفاء التي تستوفي النقاط التالية :

| $x$ | 1 | 1.3 | 1.6 | 1.9 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.14112 | $-0.68777$ | $-0.99617$ | $-0.55069$ | 0.31154 |

حيث $f(x)=\sin(3x)$ واحسب $f(1.5)$

احسب الخطأ الفعلي والخطأ الأعظمي المرتكب بالحساب علماً أن الحدودية بطريقة لاغرانج

٢) لتكن لدينا النقاط التالية

| $x$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | $\frac{13}{4}$ | 3 | $\frac{5}{3}$ |

أوجد حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن واحسب قيمة $f(0.5)$

٣) أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة هرميت للنقاط التالية :

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $-1$ | 2 | $-8$ |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 8 |

## حل وظيفة المحاضرة السابقة:

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة التي تستوفي النقاط التالية :

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 |
| $f(x_i)$ | 1 | $-6$ | 4 | 169 | 921 |

وماذا تستنتج؟

وأحسب قيمة الدالة $f$ عند $x=5$

**الحل:**

$$p_4(x)=a_0+a_1(x)+a_2(x)(x-5)+a_3(x)(x-5)(x-7)$$

$$+a_4(x)(x-1)(x-7)(x-8)$$

وحتى يتم هذا فإنّه يتوجب علينا تعيين $a_4,a_3,a_2,a_1,a_0$ لذا نقوم ببناء جدول الفروق المقسومة كما يلي:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 $a_0$ | 1 | | | | |
| | | | $a_1$ $f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{-6-1}{1-0}=-7$ | | | |
| 1 | 1 | $-6$ | | $a_2$ $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{5-(-7)}{3-0}=4$ | | |
| | | | $f[x_2,x_1]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{4-(-6)}{3-1}=5$ | | $a_3$ $f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{10-4}{6-0}=1$ | |
| 2 | 3 | 4 | | $f[x_1,x_2,x_3]=\frac{55-5}{6-1}=10$ | | $a_4$ $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{1-1}{10-0}=0$ |
| | | | $f[x_3,x_2]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}=\frac{169-4}{6-3}=55$ | | $f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{19-10}{10-1}=1$ | |
| 3 | 6 | 169 | | $f[x_2,x_3,x_4]=\frac{188-55}{10-3}=19$ | | |
| | | | $f[x_4,x_3]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}=\frac{921-169}{10-6}=188$ | | | |
| 4 | 10 | 921 | | | | |

Syria Math

$$p_4(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

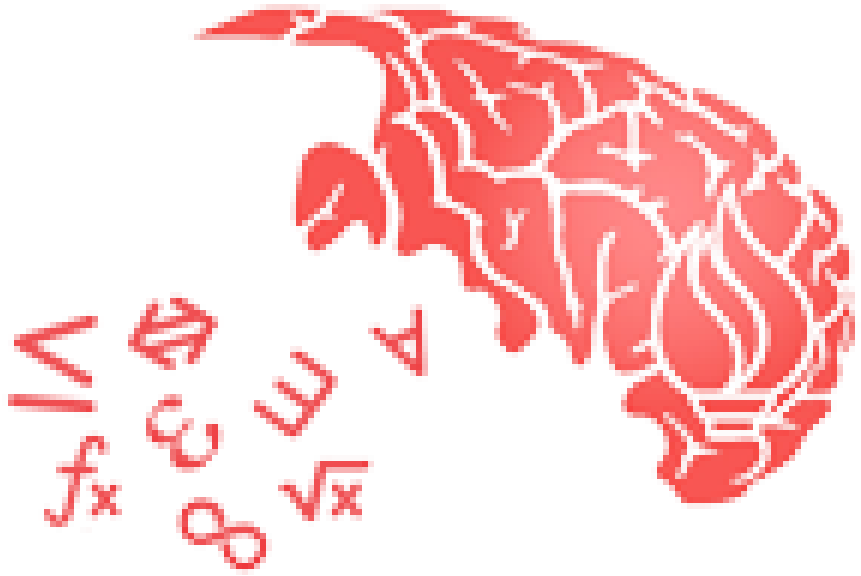
نعوّض: $a_0=0, a_1=-7, a_2=4, a_3=1, a_4=0$

$$\begin{aligned}p_3(x)&=1-7(x-0)+4(x-0)(x-1)+1(x-0)(x-1)(x-3)\\&\quad+0(x-0)(x-1)(x-3)(x-6)\\&=-7x+4x(x-1)+x(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

نستنتج أن درجة الحدودية من المرتبة (٣) لأن $a_4 = 0$

وقيمة الدالة عند $x = 5$

$$P_4(5) = 86$$



Syria Math