التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : الثالثة عشر

التاريخ :٢٢/١١/٢٠١٦

إعداد : نذير تيناوي

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

تمرين: احسب كلاً من التكاملين (تكاملي أولر)

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \; dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \; dx$$

إذا اخذنا $x = \frac{\pi}{2} - u$ في J $\Leftarrow$ $dx = -du$

ملاحظة: لقد قمنا بتغيير المتحول حيث أخذنا $x = \frac{\pi}{2} - u$ والآن نعوض في J كما نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا استخدمنا تغيير المتحول.

$$J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \; du = I$$

نلاحظ أنه أصبح نفس التكامل I

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \; dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \; dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x) \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \cos x \, dx$$

حسب الدساتير المثلثية $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin 2x}{2} \; dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin 2x - \ln 2) \, dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx - \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx - \ln 2 \, [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

لحساب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx$ نقوم بتغيير المتحول:نفرض $2x = t \Leftarrow dt = 2x \Leftarrow dx = \frac{1}{2} dt$

وبتغيير حدود التكامل $x = 0 \Rightarrow t = 0 \;,\; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t \, dt$$

لاحظ أن $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt$ ومنه:

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt$$

$$\Rightarrow 2I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt$$

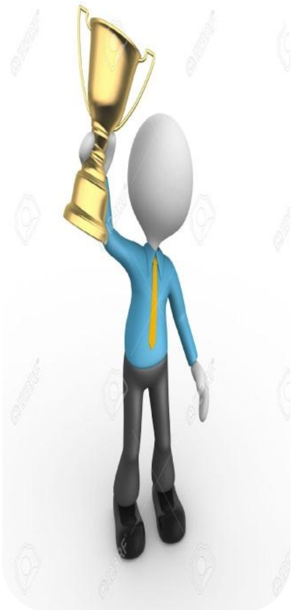
$$2I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + I$$

$$2I - I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2}$$

Syria Math

$$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$$



نستفيد من التكامل السابق لإيجاد قيمة تكامل جديد

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

نكامل بالتجزئة:نفرض $\ln \sin x = u \quad \Leftarrow \quad du = \frac{\cos x}{\sin x} dx$

و $dv = dx \quad \Leftarrow \quad v = x$

بالتعويض:

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = [u.v]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, du$$

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = [x.\ln \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\frac{\cos x}{\sin x} dx$$

نلاحظ أن $0 = [x.\ln \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$ومنه:

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cot x \, dx$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx}$$

◄التكاملات الأولرية:

تعريف: نسمي التكامل المعتل $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx$

تكامل أولر من النوع الأول أو التكامل البتاوي و هو يمثل تابع يتعلق بوسيطين (أي يتبع لمتغيرين) هما p , q

التابع $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ معرف على $]0,1[$ نكتب:

$$B(p,q) = \int_{0^+}^{a} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx + \int_a^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

بفرض $0 < a < 1$.

إن التكامل البيتاوي موجود و متقارب من أجل $p>0$, $q>0$

الإثبات :

بالنسبة للتكامل الأول نقارنه مع التابع x^{p-1} حسب الخاصية الثالثة من معايير التقارب نكتب:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = c$$

أي:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = 1$$

أي أن $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}\,dx$

و $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ من نوع واحد لما كان:

$$\int_{0^+}^{a} x^{p-1}\,dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_{0^+}^{a} = \frac{a^p}{p} - \lim_{x\to 0}\frac{x^p}{p}$$

متقارب إذا كانت $p > 0$ موجب فبالتالي $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}\,dx$ عندما $p > 0$

والآن التابع الثاني حسب معيار نهاية النسبة نجد أن:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1^-}(x^{p-1}) = 1 > 0$$

نجد أن التكاملين $\int_{a}^{1^-}(1-x)^{q-1}\,dx$ و $\int_{a}^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ من نفس النوع

و أن $\int_{a}^{1^-}(1-x)^{q-1}\,dx$ متقارب عندما $q > 0$ لأن:

$$\int_{a}^{1^-}(1-x)^{q-1}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^q}{q}\right]_{a}^{1^-}$$

متقارب ومحدود إذا كانت $q > 0$ فقط

ومنه:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

متقارب إذا كانت $p>0$ و $q>0$

بعض خواص التكامل البتاوي:

١) خاصة التناظر:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

بتغيير المتحول:

$$t=1-x \Rightarrow x=1-t$$

$$dt=-dx$$

وبتغيير حدود التكامل:

$$x=0 \Rightarrow t=1 \quad , \quad x=1 \Rightarrow t=0$$

والآن نعوض

$$B(p,q)=-\int_1^0 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=B(q,p)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(p,q)=B(q,p)}$$

٢) خاصية تغيير الوسيط:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

لكن نلاحظ أن $x^{p-1}dx=d\left(\frac{x^p}{p}\right)$ فالتكامل البيتاوي يكتب بالشكل :

$$B(p,q)=\int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p}$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض $u = (1-x)^{q-1} \quad \Leftarrow \quad du = -(q-1)(1-x)^{q-2}$

$$dv = d\frac{x^p}{p} \quad \Leftarrow \quad v = \frac{x^p}{p}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1}\, d\frac{x^p}{p} = \left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

نلاحظ أن $\left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = 0$

ومنه:

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\, d\frac{x^p}{p} = \frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

في الحقيقية يمكن أن نكتب ما يلي:

$$x^p = x^{p-1} - x^{p-1} + x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$$

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}[B(p,q-1) - B(p,q)]$$

$$B(p,q) + \frac{q-1}{p}B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

بإخراج $B(p,q)$ عامل مشترك من اليسار

$$B(p,q)\left(1 + \frac{q-1}{p}\right) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

$$\frac{p+q-1}{p}B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{p}{p+q-1}$ فنجد :

$$\boxed{B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)}$$

نطبق نفس الدستور لحساب $B(p,q-1)$ فنجد:

$$B(q,p) = \frac{q-1}{p+q-1}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}.B(p,q-2)$$

بالمتابعة و بوضع $p = m$ و $q = n$ (حيث n,m أعداد طبيعية) نصل إلى أن :

$$B(m,n) = \frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\dots\frac{1}{m+1}B(m,1)\dots(*)$$

و لكن:

$$B(m,1) = \int_0^1 x^{m-1}\,dx = \left[\frac{x^m}{m}\right]_0^1 = \frac{1}{m}$$

نعوض في $(*)$:

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+1)m}$$

لنضرب البسط و المقام بـ$(m-1)!$

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)+(m+n-2)\dots m(m-1)!}$$

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

ومنه:

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

٣) خاصية تغيير المتحول:

نفرض $x = \frac{y}{1+y}$

Syria Math

$$dx = \frac{1+y-y}{(1+y)^2} = \frac{1}{(1+y)^2}$$

$$1 - x = 1 - \frac{y}{1+y} = \frac{1+y-y}{1+y} = \frac{1}{1+y}$$

كما نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Longrightarrow y \longrightarrow \infty$$

$$B(p,q) = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{(1+y)^2}\, dy$$

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy}$$ حفظ

و هو تكامل معتل من النوع الأول وللتكامل قيمة فقط عندما $q = 1 - p$ أي $p + q = 1$

وقيمته هي:

$$\boxed{B(p,q) = (p\,, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}}$$ حفظ

مثال:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Syria Math

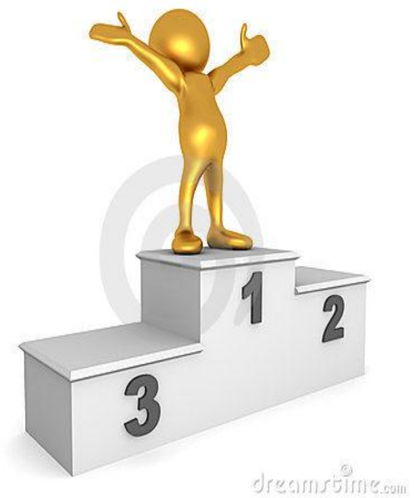
٤) الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

نضع $\quad x = \sin^2\varphi \Longrightarrow dx = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$

نغير حدود التكامل:

$$x = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$$

$$x = 1 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$



نعوض بالتكامل:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx$$

فيصبح:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi)^{p-1}\,(1-\sin^2\varphi)^{q-1}.\sin\varphi\cos\varphi\ \,d\varphi$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-2}\varphi\,.\sin\varphi\,(1-\sin^2\varphi)^{q-1}.\cos\varphi\ \,d\varphi$$

ونحن نعلم أن:

$$\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$$

بالتعويض نجد:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-2+1}\varphi\,(\cos^2\varphi)^{q-1}.\cos\varphi\ \,d\varphi$$

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\,.\cos^{2q-2}\varphi\,.\cos\varphi\ \,d\varphi$$

$$\boxed{\Longrightarrow B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\,.\cos^{2q-1}\varphi\ \,d\varphi}$$ حفظ

Syria Math

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي