Syria Math

التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : الثامنة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٨

اختبار آبل:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبرفض حدها العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

١) متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

٢) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة ومحدودة بعدد ثابت

وذلك $\forall\, x \in I$

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2}$$

ادرس تقاربها بانتظام على I.

$$I = [0, p] \qquad 0 < p < 1$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.\frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).h_n(x)$$

وإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I لأن:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,; \exists\, N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln p}$$

بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$

حيث أنه بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln |x|^n < \ln \varepsilon$$

$$n \ln |x| < \ln \varepsilon$$

نقسم على $\ln x$ وهو مقدار سالب لأنه x بين الصفر والواحد لذلك نقلب إشارة المتراجحة:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} > \frac{ln\varepsilon}{lnp}$$

نأخذ $N = \max\left(1\,,\frac{\ln \varepsilon}{\ln p}\right)$ ومن أجل كل $n \geq N$

$$n > N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln p}$$

وبالتالي المتتالية متقاربة بانتظام على $I = [0,p]$ لأن N متعلقة فقط بـ ε و مستقلة عن x

من جهة أخرى المتتالية $\{h_n(x)\} = \left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}$ متناقصة على I لأن $\frac{1}{1+(n+1)^2x^2} > \frac{1}{1+n^2x^2}$ وهي محدودة

$$\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leq 1$$

لأن البسط يساوي الواحد و المقام يساوي الواحد مضافاً له عدد موجب ..فبالتالي البسط أصغر أو يساوي المقام ضمن مجموعة التعريف المعطاة

حسب مبرهنة آبل تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2}$ متقاربة بانتظام على $I = [0,p]$

اختبار ديريكليه:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبفرض الحد العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

١) متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ محدودة بعدد ثابت وذلك أياً كان n وأياً كان x من I

٢) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة وهي متقاربة بانتظام على Iمن التابع الصفري $f(x)$

عندئذٍ:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال: لننظر في المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

معرفة على $I =]0,1[$ ؟

الحل: إن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n.\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x).h_n(x)$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$ متسلسلة هندسة و متتالية مجاميعها الجزئية:

$$S_n(x)=(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^n=\frac{(-x)-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

لنوضح كيف وصلنا إلى هذه النتيجة : لدينا :

$$S_n(x)=(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^n \;....(1)$$

نضرب الطرفين بالأساس $(-x)$:

$$(-x)S_n(x)=(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^{n+1}\;...(2)$$

بطرح (2) من (1):

$$(1+x)S_n(x)=(-x)-(-x)^{n+1}\Longrightarrow \boxed{S_n(x)=\frac{(-x)-(-x)^{n+1}}{1+x}}$$

تذكرة: متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية:

$$S_n(x)=\alpha\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

حيث α هو الحد الأول و r هو الأساس.

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{-x}{1+x}=s(x)$$

حيث نهاية $(-x)^{n+1}$ عندما n تسعى للانهاية هي الصفر.

$$\Rightarrow s(x) = \frac{-x}{1+x} \qquad \text{و} \qquad x \in]0,1[$$

$$|S_n(x)| = \left|\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \underbrace{\leq}_{\text{بحذف المقام يكبر المقدار}} |-x-(-x)^{n+1}| \underbrace{\leq}_{|a+b|\leq|a|+|b|} |x|+|x|^{n+1} < 2$$

ملاحظة: ١) القيمة المطلقة لفرق حدين هي أصغر أو تساوي القيمة المطلقة للحد الأول+ا لقيمة المطلقة للحد الثاني حسب خواص القيمة المطلقة.

٢) بما أن $\sup(I) = 1$ على المجال $]0,1[$ ومنه المقدار يصبح أصغر تماماً من 2.

ملاحظة: الحد الأعلى أي sup لمجموعة ليس من الضروري أن ينتمي لمجموعة و هذا ما يميزه عن max مجموعة.

<u>والآن بالعودة للمثال:</u>

المتسلسلة محدودة على $]0,1[$

المتتالية $\{h_n(x)\}$ حيث $h_n(x) = \frac{1}{n}$ متناقصة ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام حسب اختبار ديريكليه.

<u>خواص المتسلسلات المتقاربة بانتظام:</u>

مبرهنة(١): إذا كانت التوابع $f_n(x)$ مستمرة على المجال I وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فإن تابع المجموع $s(x)$ يكون مستمراً على I

مبرهنة(٢): لتكن لدينا متسلسلة متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ مؤلفة من التوابع $f_n(x)$ قابلة للمكاملة على $I = [a,b]$ وإذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام من تابع المجموع $s(x)$ عندئذٍ يمكن أن نكتب :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b s(x)\ dx$$

أي نقول أن حدود المتسلسلة يمكن مكاملتها حداً حداً على $I = [a,b]$)) و بالتالي يبقى الكلام صحيحاً من أجل التكامل غير المحدد))

ملاحظة: كل تابع مستمر هو قابل للمكاملة على مجال مغلق و هو شرط كافي غير لازم ^_^

مبرهنة(٣): لتكن لدينا المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ مؤلفة من التوابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على I و لتكن المشتقات $f_n'(x)$ توابع مستمرة على I و المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ متقاربة بانتظام عندئذٍ يمكن أن نكتب :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = s'(x) \qquad \forall\, x \in I$$

أي نقول أن المتسلسلة يمكن اشتقاقها حداً حداً على المجال I

مثال (إضافي) :

متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ هي متقاربة بانتظام على $|x| < 1$ أو على المجال $[-p,p]$ و $0 < p < 1$

ومجموعها $s(x) = \frac{1}{1-x}$

الحل:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

نلاحظ أن جميع الحدود مستمرة والمتسلسلة متقاربة بانتظام وبالتالي:

نستطيع مكاملتها حداً حداً

$$\int_0^p \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p x^n\, dx = \int_0^p (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + ..)\, dx$$

$$\int_0^p \frac{dx}{1-x} = \int_0^p dx + \int_0^p x\, dx + \int_0^p x^2\, dx + \int_0^p x^3\, dx + \cdots$$

$$\Rightarrow [-\ln|1-x|]_0^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n+1}}{n+1}$$

$$-\ln|1-p| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n+1}}{n+1} \;\; ; \;\; 0 < p < 1$$

وبالتالي أصبح لدينا تابع جديد يمكن أن نغير فيه ونعطيه أي قيمة.

مبرهنة: ((صياغة أخرى للمبرهنة الأخيرة))

لتكن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال $I=[a,b]$ بحيث يكون:

١) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة على I ومجموعها $s(x)$

٢) التوابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على I بالنسبة لـ x

٣) التوابع $\frac{df_n(x)}{dx}$ هي توابع مستمرة على I

٤) متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

عندئذٍ يمكن اشتقاق المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حداً حداً على I.

مثال معاكس :

متسلسلة التوابع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x}{n^2}$$

متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

لكن متسلسلة المشتقات لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2} \cos n^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} n \cos n^3 x$$

وهي متباعدة من أجل جميع القيم.

$$x = \frac{K\pi}{n^3} \in \mathbb{R}$$

حيث K عدد صحيح.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

متسلسلة المشتقات لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

وهي متقاربة بانتظام حسب اختبار فايرشتراس و بالتالي يمكن الاشتقاق حداً حداً أي :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{nx}{n^3}\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{nx}{n^2}$$

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي