التحليل العددي ١

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : الثامنة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٢

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

مرحبا اصدقائي: انتهينا من حل المعادلات غير الخطية والطرق المجالية والآن سنبدأ بفصل جديد وهو:

"الاستيفاء بكثيرات الحدود".

وستكون محاضرتنا لهذا اليوم تدور حول الأفكار التالية:

- **الاستيفاء بطريقة لانغرانج**
- **الخطأ الأعظمي المرتكب في طريقة لاغرانج**

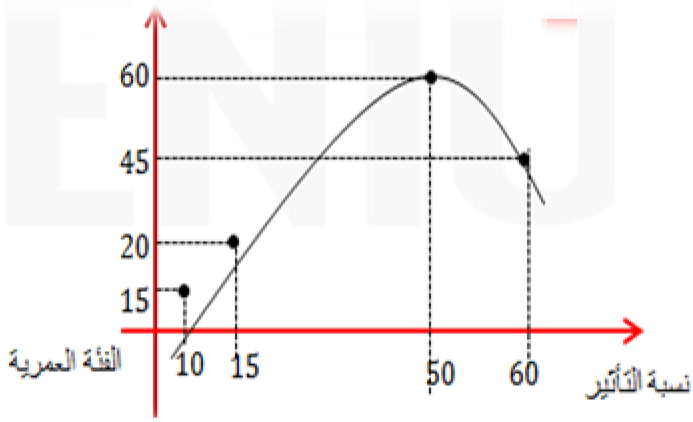
فما هو الاستيفاء؟

بفرض لدينا مجموعة من النّقاط المتمايزة $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ عندئذٍ تُعرّف مسألة الاستيفاء: بأنّها عملية إيجاد تابع f يمرّ من هذه النّقاط ويحقّق الشّروط

$f(x_i) = y_i$ عند النّقاط $i = 0,1,2,\dots,n$

مقدّمة:

قام أحد الباحثين بدراسة تأثير استخدام الأجهزة الذّكيّة على تراجع مستوى نشاط المستخدم فكانت النّتائج التي حصل عليها من خلال طرح استبيان الرّأي لمجموعة من الفئات العمرية بالشّكل الآتي:



نسبة التّأثير	الفئة العمريّة
%10	15 سنة
%15	20 سنة
%60	45 سنة
%50	60 سنة

ونظراً لعدم وجود أشخاص من فئات عمريّة لتغطيّة جميع الأعمار، كان لا بدّ من تقدير الآراء للفئات المختلفة لذا علينا وضع خط بياني يمثّل هذه القيم الفعليّة ويساعد في تقدير باقي القيم

من أجل تحقيق هذا الهدف سنقوم بإجراء الاستيفاء

- **استخدامات الاستيفاء متعدّدة في مقدمتها:**

١. إيجاد تفاضل أو تكامل تابع ما عند قيمة معيّنة دون معرفة قاعدة ربط هذا التّابع
٢. تقريب التّابع الرّياضي إلى تابع ذو شكل أبسط
٣. رسم خط بياني أملس يمرّ بمجموعة من النّقاط المفروضة

فكيف نختار التّابع؟

في البداية سنختار التّابع عبارة عن حدوديّة

ما هي درجة الحدوديّة؟ استناداً لعدد النقاط المعطاة، ستكون في الطّرق درجة الحدودية هي (عدد النّقاط ناقص واحد).

هل الحدوديّة وحيدة؟ نعم (مبرهن عليها نظريّاً وغير مطلوب)

كيف يمكن إيجاد الحدوديّة؟ بالطّرق التي سنتعرّف عليها من خلال المحاضرات القادمة

مثال: لتكن لدينا النّقاط $(3,6), (1,3), (0,2)$

عدد النّقاط $(n+1)=3$

$$p_2(x)=ax^2+bx+c$$

$$p_2(0)=2 \Rightarrow c=2$$

$$p_2(1)=3 \Rightarrow a+b+c=3$$

$$p_2(3)=6 \Rightarrow 9a+3b+c=6$$

بالحل المشترك نجد أنّ

$$p_2(x)=0{,}16667x^2+0{,}83333x+2$$

طرق إيجاد لاغرانج:

١) **طريقة لاغرانج:** لتكن لدينا مجموعة النّقاط $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$

لدينا $n+1$ نقطة مختلفة

- تعيين حدوديّة لاغرانج بالشّكل التالي:

$$p_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)\,y_n$$

ندعو $l_i(x)$ معاملات لاغرانج وهي تمثّل حدوديّات من الدّرجة n أو أقلّ وتعطى بالعلاقة

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

البسط عبارة عن

المقام عبارة عن عدد

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$l_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots\dots(x_n-x_{n-1})}$$

للتّأكّد من أنّ هذا البناء صحيح

$$p_n(x_0) = y_0$$

$$l_0(x_0)y_0 + l_1(x_0)y_1 + \dots + l_n(x_0)y_n = y_0$$

$$\Rightarrow y_0 = y_0$$

بشكل مماثل سينتج لدينا

$$y_1 = y_1$$

إذاً البناء صحيح.

مثال بفرض لدينا الجدول التّالي

x	$x_0 = -2$	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
$f(x)$	4	2	8

أوجد حدوديّة لاغرانج من الدّرجة الثانيّة للنّقاط السّابقة.

الحل:

بدايةً سنقوم بإيجاد $p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-4)} = \frac{x(x-2)}{8}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(0-(-2))(0-2)} = -\frac{(x+2)(x-2)}{4}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)} = \frac{x(x+2)}{8}$$

وعليه فإنّ $p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

نعوّض كل من $l_0(x)$ وَ $l_1(x)$ وَ $l_2(x)$ وَ y_0 وَ y_1 وَ y_2 في قانون الحدوديّة $p_2(x)$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2) - \frac{1}{2}(x+2)(x-2) + x(x+2) \ldots\ldots\ldots(*)$$

أوجد قيمة الدالة عند $x=1$ لحساب $f(1)$ نحسب $p_2(1)$ حيث نعوض قيمة ل x في (*)
لان $f(1) \approx p_2(1)$

- **ملاحظات:**

١) إذا كان أحد قيم التّابع معدومة لا داع لحساب المعامل المقابل مثلاً $y_i = 0 \Leftarrow l_i$ لا يحسب عنده
٢) التّرتيب بأسماء النّقاط غير مهم لكن يجب تثبيت الاسم في جميع المراحل
٣) من الأفضل عدم فكّ الأقواس أثناء الحلّ.

حساب E_{exact} (الخطأ الفعلي المرتكب في كثيرة حدود الاستيفاء)

- إذا طلب منّا حساب $Eexact$ للقيمة $p_2(3)$ نطبق القانون

$$Eexact = |T - Q|$$

حيث Q هي $p_2(3)$
T هي y_3 ولكن y_3 غير معلومة } لا يطلب

- أمّا إذا طلب عند أحد النّقاط المعطاة مثلاً عند النّقطة 2

$$Eexact = |T - Q|$$

حيث Q هي $p_2(2)$ } نعوّض

T هي $f(2) = y(2)$

دوماً

$$Eexact = |y(2) - p_2(2)| = 0$$

ملاحظة: قيمة الدّالّة = قيمة الحدوديّة عند النّقاط المعطاة

دراسة الخطأ في حدوديّة استيفاء لاغرانج:

ليكن لدينا مجموعة من النّقاط $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$

حيث يوجد عندنا $(n+1)$ نقطة مختلفة فإنّ الخطأ المرتكب في طريقة لانغرانج هو

$$E_{max} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f_{(\theta)}^{(n+1)}$$

حيث

- لحساب p_{n+1} يوجد حالتين:

أ- إذا كانت النّقاط متساوية البعد عن بعضها البعض نطبّق

$$\max|p_{n+1}| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n!$$

حيث $h = (x_i - x_{i-1})$ أي الفرق بين نقطتين متتاليتين

$\forall i = 1,2,\dots,n$

ب- إذا كانت النّقاط غير متساوية البعد.

نقوم بتعويض قيمة النقطة في قانون p_{n+1}

$$p_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

علماً أنّ هذا غير صحيح وسنتعلّم طريقة أصح في مقرر التّحليل العددي(2)

- $f^{(n+1)}$ هي المشتق من الدرجة $n+1$ وَ θ هي القيمة التي يكون عندها المشتق أعظميّاً

مثال

ليكن لدينا جدول القيم التّالي:

x_k	0	0,6
$\ln(x+1)$	0	0,47000

أوجد حدودية لاغرانج الخطية

أوجد الخطأ النظري (الأعظمي) والخطأ الفعلي

$$p_1(x) = \frac{x-0.6}{0-0.6}(0) + \frac{x-0}{0.6-0}(0.47000)$$

$$p_1(x) = 0.78334x$$

الخطأ الأعظمي (النظري)

$$E_{max} = |\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f_{(\theta)}^{n+1}|$$

- نوجد p_{n+1}

نلاحظ أنّه يوجد عندنا نقطتان فقط أي البعد بينهما واحد أي ثابت لذلك نطبّق $p_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{4} n!$

حيث h هي الفرق بين نقطتين متتاليتين $h = 0,6$

$$maxp_{n+1} = \frac{[0,6]^2}{4}(1)!$$

- $$f^{(n+1)}(\theta) = f^1(\theta)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h^2 = \frac{(0.6)^2}{4}$$

$|f''(x)|$ دالة متناقصة تبلغ قيمتها العظمى عندما $x = 0$ الواحد

$$E(0.45) \leq 0.045$$

$E_{max} = |T - Q|$ حيث $T = \ln(1.45)$ و $Q = p_2(0.45)$

$$= |0.37156 - 0.352509| = 0.019057$$

ميزات طريقة لاغرانج

١) لا تحتاج لأن تكون النقاط متساوية البعد.

٢) صيغة لاغرانج لحدودية الاستيفاء مفيدة جدا لأنها لا تطلب منا حل جملة من المعادلات الخطية

٣) توضح لنا صيغة لاغرانج بشكل صريح تأثير قيم الدالة على حدودية الاستيفاء.

عيوب طريقة لاغرانج

١) أن اي زيادة او نقصان لعدد النقاط يتطلب إعادة حساب جميع المعاملات
٢) إن درجة الحدودية التي تستوفي (n+1) نقطة هي n الامر التي يعني هذه الطريقة ذات تكلفة حسابية عالية.

"انتهت المحاضرة"

Syria Math