مبادى الإحصاء والاحتمالات

الدكتور : احمد يونسو

المحاضرة : الثامنة

إعداد : زهرة + شهيناز

المحاضرة الثامنة

سنبدأ بمحاضرتنا بالفصل الثاني..

الأحداث العشوائية واحتمالاتها:

فضاء الأحداث الابتدائية..

1) الحدث الابتدائي

هو مجموعة مؤلفة من نتيجة ممكنة واحدة فقط للتجربة

2) تعريف التجربة:

هي عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس

فضاء الأحداث الابتدائية

هو مجموعة كل نتائج المحتملة لتجربة ما ونرمز له (Ω) (فضاء الإمكانات وفضاء العينات)

★ الحدث العشوائي

نسمي أي مجموعة جزئية من فضاء الإمكانات Ω حدثاً عشوائياً (اختصاراً نقول حدث في Ω)

نرمز للأحداث العشوائية بأحرف لاتينية كبيرة

$A, B, C, \dots\dots$

وقوع الحدث:

نقول عن حدث A أنه وقع إذا انتمت نتيجة التجربة إلى A (نرمز عادة لنتيجة التجربة بـ W)

وبالتالي يقع A إذا كانت $W \in A$

عندئذٍ تكون Ω مستحيلة بوجه حدث مستحيل الوقوع نرمز له بـ $\emptyset$

وحدث أكيد الوقوع نرمز له Ω

مثال: لتكن التجربة إلقاء حجر نرد متوازن لمرة واحدة

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الأحداث الابتدائية

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{6\}$

أحداث تجربة 2^6 حدث

مثال:

$A = [1, 3, 5]$

يقع هذا حدث إذا كانت نتيجة التجربة إما

1 أو 3 أو 5

العمليات الجبرية على الأحداث.

1) اتحاد (اجتماع) حدثين:

إتحاد حدثين A, B هو حدث الذي يقع عندما يقع أحد الحدثين A, B على الأقل

ونرمز له بـ $A \cup B$

2] في حال عدة أحداث: اتحاد n من الأحداث

هو الحدث الذي يقع عندما يقع إحدى هذه أحداث على الأقل ونرمز له

3] تقاطع حدثين:

تقاطع حدثي A, B هو الحدث الذي يقع إذا وقع الحدثين A, B معاً في آن واحد ونرمز له بـ

$A \cap B$

4] تقاطع عدة أحداث

تقاطع n حدثاً من أحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$

هو الحدث الذي يقع عند ~~وقع~~ وقوع جميع هذه أحداث معاً في آن واحد

ونرمز لها بـ

$$\bigcap_{r=1}^{n} A = A_1 \cap \dots \cap A_n$$

5] فرق حدثين

الحدث A فرق B هو الحدث الذي يقع عندما يقع الحدث A ولا يقع الحدث B ونرمز له بـ

$A - B$

نتيجة

$A - B = A \cap B'$ (حيث B' هو حدث متمم)

6] الحدث ~~المتمم~~ المتمم

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع A ونرمز له بـ A'

7] الحدثان المتنافيان

نقول عن حدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (لا يقعان معاً)

أو (وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر)

(1)

8) الحدثان المتتامان

الحدثان A, B متتامان إذا كان $A \cap B = \phi$

$$A \cup B = \Omega$$

نتيجة: A, A' متتامان

$$A \cap A' = \phi$$

$$A \cup A' = \Omega$$

ملاحظة: إذا كان فضاء إمكانات تجربة

$$\Omega = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

حيث $[w_i]$ حدث ابتدائي حيث $i = 1, \dots n$

اختصاراً نقول

$w_1, w_2, \dots, w_n$ احداث ابتدائية

مثال

لتكن تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين ولكن A الحدث الدال على ظهور صورة لرمية الأولى ولكن B الحدث الدال على حصول على نتيجتين متماثلتين في الرميتين والمطلوب

1- اكتب فضاء الأحداث الابتدائي وعين كلاً من A, B

2) اكتب كلاً من الاحداث التالية

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A - B,\ B - A,\ A',\ B',\ A' \cup B',\ A' \cap B'$$

الحل

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ويكون

1)

$$A = \{HH, HT\}$$

$$B = \{HH, TT\}$$

2)

$$A \cup B = \{HH, HT, TT\}$$

$$A \cap B = \{HH\}$$

$$A - B = \{HT\},\quad B - A = \{TT\}$$

$$A' = \{TH, TT\},\quad B' = \{TH, HT\}$$

$$A' \cup B' = \{HT, TT, TH\}$$

$$A' \cap B' = \{TH\}$$

قانونا دومرغان...

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

ويمكن تعميم هذين القانونين إلى حالة n عدد.

★ جبر الأحداث

صف مجموعات ما Ω يسمى جبر الأحداث إذا حققت شروطاً معينة سنعرفها لاحقاً

مثلاً...

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

$$A = \{\underbrace{\{a\}}_{A_1}, \underbrace{\{a, b\}}_{A_2}, \underbrace{\{c\}}_{A_3}\}$$

حيث A تنتمي لـ A والمجموعة جزئية من A

$$B = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \underbrace{\{a, b, c\}}_{\Omega}\}$$

تعريف

لتكن Ω فضاء الإمكانات لتجربة عشوائية ولتكن A صف مجموعات من عناصر Ω نقول عن هذا الصف انه جبر على Ω إذا حقق شروط التالي

1) $\Omega \in A$

2) $\forall A, B \in A : A \cup B \in A$

مغلق بالنسبة للاجتماع

3) $\forall A \in A' : A' \in A$

مغلق بالنسبة لمتمم

(2)

فإذا كانت A جبراً على Ω وتحققت شروط التالية

$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

المعدودة فإن

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

فإن A تسمى جبراً تاماً

نتيجة: كل جبر تام هو جبر ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح..

نتيجة: إذا كانت ∅ تنتمي إلى أي جبر A على Ω حسب 1، 2 لدينا

$\Omega \in \mathcal{A}$ & $\Omega' = \emptyset \in \mathcal{A}$

نتيجة

~~[illegible] Ω~~

إن جبر A مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي إلى أنه إذا كانت

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

يبرهن بالاستقراء

نتيجة

أي جبر A مغلق بالنسبة لتقاطع منتهي

الإثبات:

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

بالتالي حسب 3

$A_1', A_2', \dots, A_n' \in \mathcal{A}$

حسب نتيجة 2 مع قانون دومورغان

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n')' \in \mathcal{A}$ حسب 3

ملاحظة

أوسع جبر تام على Ω (عندما تكون Ω منتهية) هو مجموعة كل أجزاء Ω مع ∅ وأضيق جبر تام على Ω ونرمز له $P(\Omega)$ $\{\emptyset, \Omega\}$ هو مؤلف من ∅ و Ω.

تسمى Ω جبر تام المعرف على Ω جبر الأحداث العشوائية فإذا كانت Ω منتهية نأخذ جميع الأجزاء

$\mathcal{A} = P(\Omega)$

وإذا لم تكن Ω منتهية أو معدودة نقبل بأن صف أحداثية A هو جبر تام

انتهت محاضرة

(3)