مبادئ الإحصاء والاحتمالات

الدكتور : أحمد يونس

المحاضرة : الثانية عشرة

إعداد : زهرة + شهيناز

Syria Math

محاضرة ثانية عشر (12)

Subject : مبادئ الإحصاء

تذكرة:

$C(n,n) = 1$

$C(n,1) = n$

$C(n,r) = C(n,n-r)$ $\quad r \le n$

$n_1 + n_2 = n \begin{cases} n_1 = r \\ n_2 = n-r \end{cases}$

$C^n_{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$

ملاحظة: عملية تشكيل تواليفياً من r من n عنصراً بحيث يكون r عنصراً في المجموعة الأولى و n-r عنصراً في المجموعة الثانية يعادل تقسيم المجموعة الأصلية إلى مجموعتين $n_1 = r$ و $n_2 = n-r$

فإن:

$C^n_{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1! \, n_2!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

يمكن تعميم هذا المفهوم بالشكل التالي:

يمكن تقسيم مجموعة عدد عناصرها n إلى k مجموعة جزئية $n_1, n_2, \dots, n_k$ عنصراً بحيث $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ويكون عدد طرق التقسيم:

$C^n_{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

$\{a,b,c,d,e\}$

$n_1 = 2$

$n_2 = 1$

$n_3 = 2$

1) $\{a,b\}\{c\}\{d,e\}$

2) $\{a,c\}\{b\}\{d,e\}$

$C^5_{2,1,2} = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} = ?$

مثال: كم طريقة يمكن تشكيل لجنة تضم طالبين وثلاثة طلاب من مجموعة تتكون من خمس طالبات وستة طلاب؟

الحل: مرحلة أولى اختيار الطالبات وتتم:

$C(5,2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$

مرحلة ثانية اختيار الطلاب وتتم:

$C(9,3) = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{2 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 84$

بما أن المرحلتين يجب أن تتما لكي تتشكل اللجنة فعدد طرق تشكيل اللجنة:

$C(5,2) \cdot C(9,3) = 10 \times 84 = 840$

مثال: صندوق يحوي 8 كرات بيضاء و4 سوداء نسحب عشوائياً 5 كرات فما احتمال أن تكون بينها كرتان بيضاوان؟

الحل: عدد حالات الممكنة (الكلية) لعملة السحب

$C(12,5) = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$

عدد حالات الملائمة $C(8,2) \times C(4,3)$

$= \frac{8!}{2! \cdot 6!} \times \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 112$

احتمال الحادث الملائم $= \frac{\text{عدد حالات الملائمة}}{\text{عدد حالات الممكنة}} = \frac{112}{792} = 0,14$

مثال 3: إذا كان عدد أوراق يانصيب 30 ورقة من بينها 5 أوراق رابحة اشترى شخص 8 أوراق والمطلوب:

(P) ما احتمال أن يربح المشتري أية جائزة؟

(أ) ما احتمال أن يربح ثلاث جوائز.

(ب) ما احتمال أن يربح جائزة ولم يربح.

Syria Math

Subject :

أ) عدد حالات الممكنة :

$C(30,8) = \frac{30!}{8!\cdot 22!} = 5852925$

ب) عدد حالات الملائمة :

$C(5,0) \times C(25,8)$

$= \frac{25!}{8!\cdot 17!} = 1081575$

الاحتمال المطلوب :

الاحتمال المطلوب $= \frac{\text{عدد حالات الملائمة}}{\text{عدد حالات الممكنة}} = \frac{1081575}{5852925} = 0,185$

ج) عدد حالات الملائمة :

$C(5,3) \times C(25,5) = 531300$

الاحتمال المطلوب :

الاحتمال المطلوب $= \frac{531300}{5852925} = 0,091$

د) عدد حالات الملائمة :

$C(5,1)\times C(25,7) + C(5,2)\times C(25,6) + \dots + C(5,5)\times C(25,3) = \dots ?$

ط) يحدث العكس : إذا رمزنا بـ A لحدث الطلب الأول و C لحدث الطلب الثالث فإن C, A حادثان متعاكسان :

$P(C) = 1 - P(A) = 1 - 185 = 0,815$

مثال (4) : كم طريقة يمكن توزيع 9 ألعاب مختلفة على ثلاثة أطفال A, B, C إذا كان نصيب A أربع ألعاب ، ونصيب B ثلاث ألعاب ونصيب C لعبتين.

الحل : عدد طرق الملائمة لعملية التوزيع :

$C_{9}^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 630$ طريقة

تذكرة :

$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!}$

الفصل الثالث

الاحتمال الشرطي ، الاستقلال الشرطي ....

إذا كان A و E حدثين متعلقين بتجربة ما فإننا نعني باحتمال وقوع الحدث A مشروطاً بـ E.

((احتمال وقوع الحدث A علماً أن الحدث E قد وقع))

$P_E(A) = P(A/E)$ ويقرأ كذلك بـ :

مثال توضيحي : لنفرض أن تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وليكن : حيث $n(\Omega) = 6$ إذا :

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,6\}$, $C = \{1,2,3\}$, $E = \{2,4,5,6\}$

لدينا :

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

نفرض أن E قد وقع :

$P_E(A) = P(A/E) = \frac{|A\cap E|}{|E|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(B/E) = \frac{|B\cap E|}{|E|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(C/E) = \frac{|C\cap E|}{|E|} = \frac{1}{4}$

التعريف لتعريف الاحتمال الشرطي : نعلم أنه : A, E

حيث $P(E) \neq 0$ لدينا :

$P(A/E) = \frac{|A\cap E|}{|E|} = \frac{\frac{|A\cap E|}{|\Omega|}}{\frac{|E|}{|\Omega|}}$

$P_E(A) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)}$