تحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : الثامنة

التاريخ : ١٣/١١/٢٠١٦

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة الثامنة ١٢/١١/٢٠١٦م

سوف نبدأ هذه المحاضرة بالفصل الثاني وهو: الفصل الثاني.

المتسلسلات العددية..

* تعريف المتسلسلة العددية:

لتكن لدينا المتتالية.

$$\{a_n\}_{n\geq 1}=\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

حيث $a_n\in \mathbb{R}$

تعرف المتسلسلة بأنها المجموع اللانهائي لعناصر متتالية ونعبر عنها بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ويدعى: a_1 الحد الأول للمتسلسلة

a_2 الحد الثاني للمتسلسلة و...

ويدعى a_n الحد العام أو الحد النوني للمتسلسلة وهكذا....

وتجدر الملاحظة أنه يرمز في بعض الأحيان للحد الأول بالرمز a_0

مثال ... 1] لدينا المتتالية:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$$

فتكون المتسلسلة هي:

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

2] $$\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

تعريف المتسلسلة عن طريق الشكل الآخر وهو متتالية المجاميع الجزئية:

(تعريف متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة عددية):

إن كل متتالية هي تطبيق

$$g : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

حيث:

$$g(n) = a_n \; ; \forall n \in N$$

- فنعرف متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة عددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بالشكل التالي:

$$f : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \longrightarrow a_1 = S_1$$
$$2 \longrightarrow a_1 + a_2 = S_2$$
$$3 \longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = S_3$$
$$\vdots$$
$$n \longrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$$

أي:

$$f(n) = \sum_{n=1}^{n} a_n \; ; \forall n \in N$$

- وهي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة ونرمز لها $\{S_n\}_{n\in N}$

* تعريف تقارب متسلسلة:

نقول عن متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إنها متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة،

أي إذا وجد $S\in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

وأكثر من ذلك يكون مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يساوي S أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متقاربة} \iff \{S_n\}_{n\in N} \text{ متقاربة}$$

$$\Longrightarrow \exists S \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

وبأنه نقول: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n$

* ونقول عن المتسلسلة متباعدة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متباعدة؛

مثال (1) ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

ولأنه بناءً على التعريف السابق نريد إيجاد S_n

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

- نعود إلى فكرة تفريق الكسور:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

وبالاختصار:

متتالية المجاميع الجزئية $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \simeq 1$$

مثال (2) ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \dots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

وبالعودة للمجموع الهندسي:

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\Longrightarrow S_n = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\lim S_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

علماً $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ حسب نظرية شهيرة

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

الخلاصة ...

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

* خواص المتسلسلات المتقاربة:

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين فإنه:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$

أشهر المتسلسلات:

① المتسلسلة الحسابية:

ليكن لدينا المتتالية $\{a_n\}_{n\in N}$ متتالية حسابية أي

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a + r$$
$$a_3 = a + 2r$$
$$a_4 = a + 3r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a + (n-1)r$$
$$\vdots$$

فالمتسلسلة الحسابية تكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

وبالعودة إلى دستور الاستقراء الرياضي:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

هذا يوافق:

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4\times 5}{2}$$

نعود:

$$S_n = n\cdot a + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]r$$
$$= n\cdot a + \frac{(n-1)n}{2} r$$
$$= \frac{2a\cdot n + n(n-1)r}{2}$$
$$= \frac{n}{2}[2\cdot a + (n-1)r]$$
$$= \frac{n}{2}[\underbrace{a}_{a_1} + \underbrace{a + (n-1)r}_{a_n}]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2}(a_1 + a_n)\right]$$
$$= \pm\infty \quad ; \; a_1 + a_n \neq 0$$

حيث أنه سوف نتذكر:

$$\lim a^n = \begin{cases} 0 & : |a| < 1 \\ 1 & : a = 1 \\ \text{لا يوجد} & : a = -1 \; ..(*) \\ \pm\infty & : |a| > 1 \end{cases}$$

ونلاحظ أنه أهم صفة لهذه المتسلسلة أنها متسلسلة متباعدة وذلك لأن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n\in N}$ متباعدة

② المتسلسلة الهندسية:

لنفرض أن المتتالية $\{a_n\}_{n\in N}$ متتالية هندسية أي:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a\cdot r$$
$$a_3 = a\cdot r^2$$
$$\vdots$$
$$a_n = a\cdot r^{n-1}$$

فتكون المتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1}$$

ونلاحظ أنه دراسة المتسلسلة يعني دراسة المتتالية المجاميع الجزئية أي إيجاد S_n وتعد هذه المتسلسلة من أهم المتسلسلات العددية لأن هذه المتسلسلة تكون متقاربة ومتباعدة وذلك تبعاً لقيمة r

الحالة الأولى: $\boxed{r = 1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a(1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a$$

$$\Longrightarrow S_1 = a$$
$$S_2 = a + a$$
$$\vdots$$
$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{مرة } n} = n\cdot a$$

3

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n.a) = \infty$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية متباعدة ومنه (حسب التعريف) فالمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ متباعدة في حال $\boxed{r=1}$

الحالة الثانية $\boxed{r=-1}$

نلاحظ أن المتسلسلة الهندسية المدروسة في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي:

$$\sum a_n = \sum a(-1)^{n-1} = a - a + a - \cdots$$

وبالتالي فإن حدود متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}_{n\in N}$ تكون بالشكل التالي:

$$S_1 = a_1 \;,\; S_2 = 0 \;,\; S_3 = a \;,\; S_4 = 0 \;,\; \ldots$$

وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{S_n\}_{n\in N}$ تتأرجح بين العددين المختلفين a , 0 وبالتالي فهي متباعدة

ومنه المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ تكون متباعدة في حال $\boxed{r=-1}$

* والآن من أجل تسهيل مناقشة الحالتين التاليتين

سوف نكتب الحد العام لمتتالية مجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n\in N}$ بشكل مختلف كما يلي:

$$S_n = a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \cdots + a.r^{n-1} \cdots (1)$$

نلاحظ بأن المجموع يساوي:

$$\boxed{a.\frac{1-r^n}{1-r}}$$

نضرب بـ $(-r)$:

$$-r.S_n = -a.r - a.r^2 - a.r^3 - \cdots - a.r^{n-1} - a.r^n \cdots (2)$$

ونجمع (1) , (2):

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

وبإخراج S_n عامل مشترك و a عامل مشترك

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\Rightarrow S_n = a.\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a.r^n}{1-r}$$

ومنه نستنتج الحالة الثالثة $|r|<1$ حيث:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

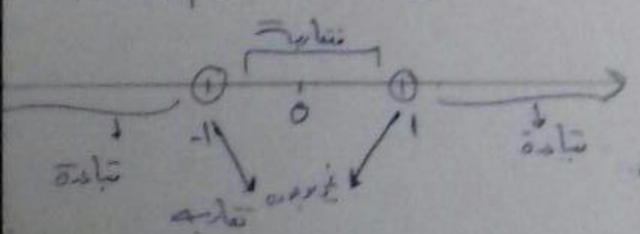
وبالتالي:

$$\lim S_n = \frac{a}{1-r} - a.\lim\left(\frac{r^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}$$

وبالتالي بالاستفادة من التعريف تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ متقاربة في حال $\boxed{|r|<1}$ ومجموعها يساوي:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

ونكون الحالات على مستقيم الأعداد:



③ المتسلسلة الريمانية:

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ الإمتسلسلة ريمانية إذا كانت في الشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad : p \in \mathbb{R}$$

وإذا كانت:

$$1)\ p=1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

$$2)\ p=2 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

وهنا لا نستطيع تحديد التقارب وتباعد لذلك نعتمد على معيار الكوشي التكاملي

بعد عرض فقرة معيار كوشي التكاملي سيتم ذكر البرهان بالتفصيل ويكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{متباعدة} & p=1 \\ \text{متقاربة} & p>1 \\ \text{متباعدة} & p<1 \end{cases}$$

ولاحظ أنه:

متتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة | المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

④ المتسلسلة التراكبية (التلسكوبية):

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إنها تراكبية (تلسكوبية) إذا استطعنا كتابة الحد العام بالشكل التالي:

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

وهذا النمط إذا كانت:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ تراكبية

تتقارب المتسلسلة التراكبية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

إذا تقاربت $\{b_n\}$ متتالية بالإضافة إلى أن مجموعها يساوي:

$$S = b_1 - l$$

حيث $\lim_{n\to\infty} b_n = l$

انتهت المحاضرة...