Syria Math

التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : الحادية عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١١/

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

في ظلّ مشوارنا معكم زملائي نكمل سويّاً بحث الاستيفاء بكثيرات الحدود ومع طريقة جديدة تدعى طريقة سبلين(الشّريحة) حيث أنّ هذه الطريقة مختلفة عن الطرق الثلاث السّابقة(لاغرانج-نيوتن-هرميت)

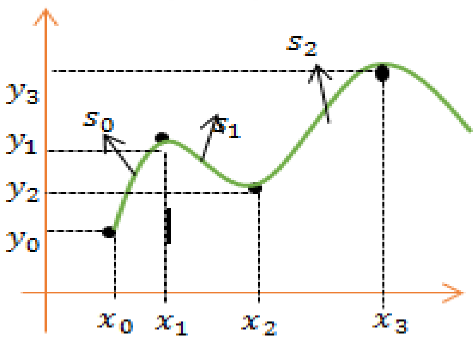
ظاهرة رانج:

كان السائد مسبقا أن زيادة عدد النقاط سيؤدي غلى زيادة في الدقة حتى آتى العالم رانج وأعطانا الدلة $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ وأثبت أنه من أجل حدودية استيفاء من الدرجة (٤) بالنسبة لهذه الدالة نحصل على استيفاء أفضل من الدرجة (١٦) وبالتالي نقض الفكرة التي كانت سائدة سابقا

طريقة سبلين ((Splin))

"هذه الطّريقة تختلف عن الطرق الثلاث السابقة(لاغرانج-هرميت-نيوتن)"

حيث أنّ الطّرق الثلاث السابقة تعتمد على أن نأخذ حدوديّة تحوي جميع النقاط أمّا في طريقة سبلين سنأخذ الحدوديّة على مجالات



حيث أنّه تقسم الحدودية إلى أنواع:

١. حدوديّة من الدرجة الأولى لكنها لا تصلح بسبب الانكسار حيث لا تقبل الاشتقاق
٢. حدوديّة من الدرجة الثّانية
٣. حدوديّة من الدرجة الثّالثة
٤. حدوديّة من الدرجة الرّابعة(لكن الخطأ فيها كبير جداً)

سندرس نحن حدوديّات الدّرجة الثّالثة وسميت حدودية سبلين التكعيبية وهي من الشّكل :

$$S = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 & ; [x_0, x_1] \\ S_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 & ; [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + d_{n-1} x^3 & ; [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد حدودية بين كل نقطتين متتاليتين

لتكن لدينا النقاط $(x_0, y_0) \dots \dots \dots . (x_n, y_n)$

لدينا $(n+1)$ نقطة مختلفة سنقوم بإيجاد حدودية من الدرجة الثالثة فقط لأنها أثبتت جدارتها بالنسبة للدرجات المختلفة .

ندعو x_0 نقطة البداية

$; i = 1, \dots \dots \dots n-1$ $\quad x_i$ ندعوها " العقد"

x_n نقطة النهاية

نحصل على جملة المعادلات التالية التي تمثل كثيرة حدود الاستيفاء المطلوبة

من الشكل السابق

تحوي هذه جملة من المعادلات عددها n تحوي على $4n$ مجهول

المعاليم: $n+1$ ، $n-1$ ، $n-1$ ، $n-1$ ، $+2$

المجاهيل: $4n$

ميزان الحل

الشروط التي يجب أن تحققها هذه الحدوديات

$$s(x_i) = y_i \qquad ; i = 0,1, \dots \dots n \qquad (١$$

يدعى شرط الاستيفاء الأصلي وفيه $n+1$ معلومة

٢) العقد

(a $\quad s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1}) \qquad ; j = 0, \dots \dots n-2$

يدعى شرط الاتصال وفيه $n-1$ معلومة

(b $\quad S_j'(x_{j+1}) = s'_{j+1}(x_{j+1}) \qquad ; j = 0, \dots \dots n-2$

يدعى شرط الاستمرار وفيه $n-1$ معلومة

(c $\quad S_j''(x_{j+1}) = s''_{j+1}(x_{j+1}) \qquad ; j = 0, \dots \dots n-2$

يدعى شرط التقعر وفيه $n-1$ معلومة

٣) الشروط الحدية

أ) الطبيعي أو الحر

$$s''(x_n) = 0$$
$$s''(x_n) = 0$$

وفيه ٢ معلوم

ب) المقيد

$$s'(x_0) = f'(x_0)$$
$$s'(x_n) = f'(x_n)$$

وفيه ٢ معلوم

مثال: ليكن لدينا S تابع سبلين طبيعي الذي يستوفي التّابع f عند النّقاط

نقطة البداية $x_0 = 1$, العقدة $x_1 = 2$, نقطة النهاية $x_2 = 3$

$$S = \begin{cases} S_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3 & ; 1 \le x \le 2 \\ S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & ; 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

أوجد الثّوابت a, b, c, d

الحل: نطبّق الشروط:

١) $S(x_i) = y_i$ من أجل $i = 0,1, \dots, n$ ((لا يمكن تطبيق هذا الشرط لأن قيم الدالة غير معلومة عند النقاط x_i))

٢) بدايةً سنوجد المشتقات لتنظيم الحل:

$$S_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3$$
$$S_0'(x) = 2 - 3(x-1)^2$$
$$S_0''(x) = -6(x-1)$$

$$S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$$
$$S_1'(x) = b + 2c(x-2) - 3d(x-2)^2$$
$$S_1''(x) = 2c + 6d(x-2)$$

أ-

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

أي $S_0(x_1) = S_1(x_1)\ \ ; x_1 = 2$

$$2(x-1) - (x-1)^3 = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow \quad 2 - 3(2-1)^2 = b + 2c(2-2) + 3d(2-2)^3$$

$$\Rightarrow a = 1$$

ب- $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ أي

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Rightarrow 2 - 3(x-1)^2 = b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow \quad 2 - 3(2-1)^2 = b + 2c(2-2) + 3d(2-2)^3$$

$$\Rightarrow b = -1$$

ت- $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$ أي

$$S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$$
$$-6(x-1) = 2c + 6d(x-2)$$
$$x_1 = 2 \Rightarrow -6(2-1) = 2c + 6d(2-2)$$
$$\Rightarrow C = -3$$

٣) نلاحظ كما ذكر بالسؤال أنّ سبلين طبيعي فنطبق

$$S_0''(x_0) = 0$$

حيث أن $x_0 = 1$ $\quad S_0''(x_n) = 0$

$$-6(x-1) = 0$$

$$-6(1-1) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$S''(x_n) = 0$ أي $S''(x_0) = 0$

$$2c + 6d(x-2) = 0$$

حيث $x = 3, c = -3$ $\quad 2(-3) + 6d(3-2) = 0$

$$-6 + 6d = 0 \Rightarrow d = 1$$

تمرين وظيفة :

لتكن لدينا الشريحة التكعيبية المقيدة لسبلين $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = 22 - 9(x-1) - (x-1)^2 & ;1 \le x \le 2 \\ s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & ;2 \le x \le 3 \end{cases}$$

أوجد الثوابت a, b, c, d بفرض

$$f'(1) = f'(3)$$

"انتهت المحاضرة"