Syria Math

المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : الخامسة

التاريخ : ٢/١١/٢٠١٦

إعداد : محمد شهلا & خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

بدأ الدكتور المحاضرة بمتابعة حل أمثلة عن موضوع المحاضرة السابقة (المعادلات التفاضلية التامة)..

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضليّة:

$$\frac{1}{x}.dy-\frac{y}{x^2}.dx=0$$

الحل: نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y)=-\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{1}{x^2} \\ N(x,y)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذاً المعادلة تامة.

والحل العام من الشكل: $F(x,y)=C$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F، لنأخذ:

$$F(x,y)=\int M(x,y).dx+\varphi(y)=\int -\frac{y}{x^2}.dx+\varphi(y)=\frac{y}{x}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}+\varphi'(y)=N$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}+\varphi'(y)=\frac{1}{x}\Rightarrow \varphi'(y)=0 \Rightarrow \varphi(y)=c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y)=\frac{y}{x}=C}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال(٢): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(3x^2+6xy^2).dx+(6x^2y+4y^3).dy=0$$

الحل: نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy \\ N(x,y) = 6x^2y + 4y^3 \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

الشرط محقق إذاً المعادلة التفاضلية تامة ، والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F ، لنأخذ:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,.\,dx + \varphi(y)$$

$$= \int (3x^2 + 6xy^2)\,.\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = N$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 \ \Rightarrow \ \varphi'(y) = 4y^3 \ \Rightarrow \ \varphi(y) = y^4 + c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}$$

وهو الحل العام.

مثال(٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \mathbf{1})\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{dx} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^2 + \mathbf{3})\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{dy} = \mathbf{0}$$

الحل: نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = x + y + 1 \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ N(x,y) = x - y^2 + 3 \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

الشرط محقق إذاً المعادلة التفاضلية تامة ، والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F ، لنأخذ:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y)$$

$$= \int (x+y+1).dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y)$$

نوجد المشتق الجزئي بالنسبة لــ y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y) = N$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3 \;\; \Rightarrow \;\; \varphi'(y) = -y^2 + 3$$

$$\Rightarrow \;\; \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C}$$

وهو الحل العام.

بالإمكان إيجاد الحل بطريقة ثانية بأخذ :

$$F(x,y) = \int N(x,y).dy + \varphi(x)$$

ثم نشتق بالنسبة لـــ x ، ونوجد الحل العام.

مثال(٤): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{(4x^3y^2 - 2xy).dx + (3x^4y^2 - x^2).dy = 0}$$

الحل: نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = 4x^3y^2 - 2xy \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12y^2x^3 - 2x \\ N(x,y) = 3x^4y^2 - x^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12y^2x^3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذا المعادلة التفاضلية تامة ، والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F ، لنأخذ:

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,.dy + \varphi(x)$$

$$= \int (3x^4y^2 - x^2).dy + \varphi(x) = x^4y^3 - x^2y + \varphi(x) \dots (1)$$

نوجد المشتق الجزئي بالنسبة لــ x ، ونطابق مع M :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^4y^3 - x^2y)' + \varphi'(x) = M$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3y^3 - 2xy + \varphi'(x) = 4x^3y^3 - 2xy \;\Rightarrow\; \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow\; \varphi(x) = c$$

نعوض في (1) فيكون الحل العام هو:

$$\Rightarrow F(x,y) = x^4y^3 - x^2y + C = 0$$

تمرين (وظيفة): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(\boldsymbol{4x - 3y - y.\sin x).dx + (\cos x - 3x - \sin y).dy = 0})$$

سنورد الحل في نهاية المحاضرة.

المعادلات التفاضليّة غير التامة (عوامل التكميل)

تعريف: إذا كانت لدينا المعادلة التالية:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \dots (1)$$

هي معادلة تفاضلية غير تامة أي أنَّ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

عندئذٍ إذا استطعنا إيجاد دالة $\mu(x,y)$ بحيث إذا ضربنا طرفي المعادلة (1) بها أصبحت تامة..

فإننا نسمِّي الدالة $\mu(x,y)$ **بعامل التكميل**.

كيفية إيجاد عامل التكميل:

إذا كانت لدينا المعادلة التالية:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

معادلة تفاضلية غير تامة فلكي تكون تامة يجب أن نجد $\mu(x,y)$ بحيث يتحقق الشرط (اللازم والكافي):

$$\frac{\partial[\mu(x,y).M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu(x,y).N(x,y)]}{\partial x}$$

هنا نلاحظ أننا نشتق جداء دالتين أي: (مشتق الأول بالثاني + مشتق الثاني بالأول)

$$\Rightarrow M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

نعزل الحدود التي فيها μ :

$$\Rightarrow M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

وهنا نميّز حالتين:

١) إذا كان μ (عامل التكميل) تابع لـــ x فقط أي:

$$\mu(x,y)=\mu(x)\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow -N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Rightarrow N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

والآن لنرمز للمقدار في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة بالرمز $\psi(x)$:

$$\boxed{\psi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\mu.\partial x}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}.\partial x$$

بالمكاملة نجد:

$$\ln\mu = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.\partial x \Rightarrow \ln\mu = \ln e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.\partial x} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = e^{\int \psi(x).\partial x}}$$

٢) إذا كان μ (عامل التكميل) تابع لـــ y فقط ، أي:

$$\mu(x,y) = \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial\mu}{\partial x} = 0 \Rightarrow M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow -M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

والآن لنرمز للمقدار في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة بالرمز $\varphi(y)$:

$$\boxed{\varphi(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mu}{\mu.\partial y} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \Rightarrow \frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.\partial x$$

بالمكاملة نجد:

$$\ln\mu = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.\partial y \Rightarrow \ln\mu = \ln e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.\partial y} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.\partial y}$$

$$\boxed{\mu = e^{\int \varphi(y).\partial y}}$$

حل تمرين الوظيفة: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(4x - 3y - y.\sin x).dx + (\cos x - 3x - \sin y).dy = 0$$

الحل:

نبرهن أنها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = 4x - 3y - y.\sin x \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial M}{\partial y} = -3 - \sin x \\ N(x,y) = \cos x - 3x - \sin y \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\sin x - 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذا المعادلة التفاضلية تامة ، نكامل بالنسبة لـــ x :

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y)$$

$$= \int (4x - 3y - y.\sin x).dx + \varphi(y) = 2x^2 - 3yx + y\cos x + \varphi(y) \dots (1)$$

نوجد المشتق الجزئي بالنسبة لـــ y ، ((لنوجد $\varphi(y)$)):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x + \cos x + \varphi'(y) = N$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -3x + \cos x + \varphi'(y) = \cos x - 3x - \sin y \;\Rightarrow\; \varphi'(y) = -\sin y$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(y) = \cos y} \dots (2)$$

نعوض في (1) فيكون الحل العام:

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = 2x^2 - 3yx + y\cos x + \cos y = C}$$

ملاحظة:

لا يتغير شيء إذا وضعنا ثابت تكامل c في مكاملة المعادلة (2) لأنه في كلا الحالتين سيظهر الثابت C في نهاية الحل.

" انتهت المحاضرة "

مع تحيات : Syria Math Team

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺