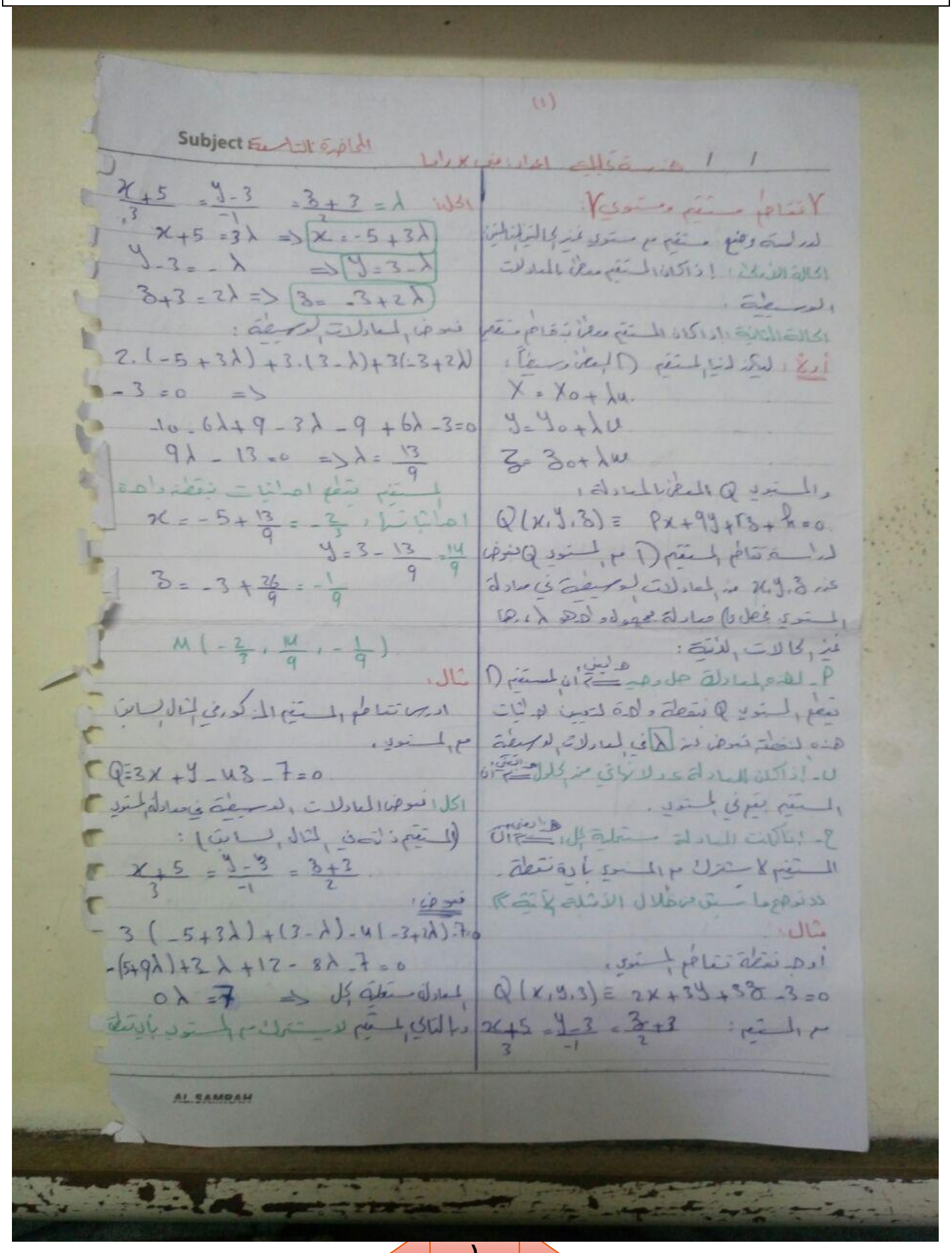
هندسة تحليلية

الدكتورة : ميسم جديد

المحاضرة : التاسعة

إعداد :منى + راما



Subject المحاضرة التاسعة

(1)

/ / هندسة تحليلية أعداد في x ربا

٢ تقاطع مستقيم ومستوي ٢

لدراسة وضع مستقيم مع مستوي نميز الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: إذا كان المستقيم معرفاً بالمعادلات الوسيطية.

الحالة الثانية: إذا كان المستقيم معرفاً بتقاطع مستويين.

أولاً: ليكن لدينا المستقيم (Δ) المعرف وسيطياً:

$x = x_0 + \lambda u$

$y = y_0 + \lambda v$

$z = z_0 + \lambda w$

والمستوي Q المعرف بالمعادلة:

$Q(x,y,z) \equiv Px + Qy + Rz + h = 0$

لدراسة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي Q نعوض عن x, y, z من المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي فنحصل على معادلة مجهولها الوحيد λ، ونميز الحالات التالية:

P- لهذه المعادلة حل وحيد هذا يعني أن المستقيم (Δ) يتقاطع المستوي Q بنقطة وحيدة لتعيين إحداثيات هذه النقطة نعوض قيمة λ في المعادلات الوسيطية.

Q- إذا كانت المعادلة عديمة الحل أي من أجل أي λ ∈ ℝ هذا يعني أن المستقيم لا يتقاطع مع المستوي بأية نقطة. ويمكن توضيح ما سبق من خلال الأمثلة الآتية:

مثال:

أوجد نقطة تقاطع المستوي $Q(x,y,z) \equiv 2x + 3y + 3z - 3 = 0$ مع المستقيم: $\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2} + 3$

الحل:

$\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2} = \lambda$

$x + 5 = 3\lambda \Rightarrow x = -5 + 3\lambda$

$y - 3 = -\lambda \Rightarrow y = 3 - \lambda$

$z + 3 = 2\lambda \Rightarrow z = -3 + 2\lambda$

نعوض المعادلات الوسيطية:

$2(-5+3\lambda) + 3(3-\lambda) + 3(-3+2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow$

$-10 + 6\lambda + 9 - 3\lambda - 9 + 6\lambda - 3 = 0$

$9\lambda - 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{13}{9}$

المستقيم يتقاطع المستوي بنقطة واحدة إحداثياتها:

$x = -5 + \frac{13}{9} = -\frac{2}{3}$

$y = 3 - \frac{13}{9} = \frac{14}{9}$

$z = -3 + \frac{26}{9} = -\frac{1}{9}$

$M\left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{9}, -\frac{1}{9}\right)$

مثال:

أدرس تقاطع المستقيم المذكور في المثال السابق مع المستوي:

$Q \equiv 3x + y - 4z - 7 = 0$

الحل: نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم المذكور في المثال السابق في معادلة المستوي:

$\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$

نعوض:

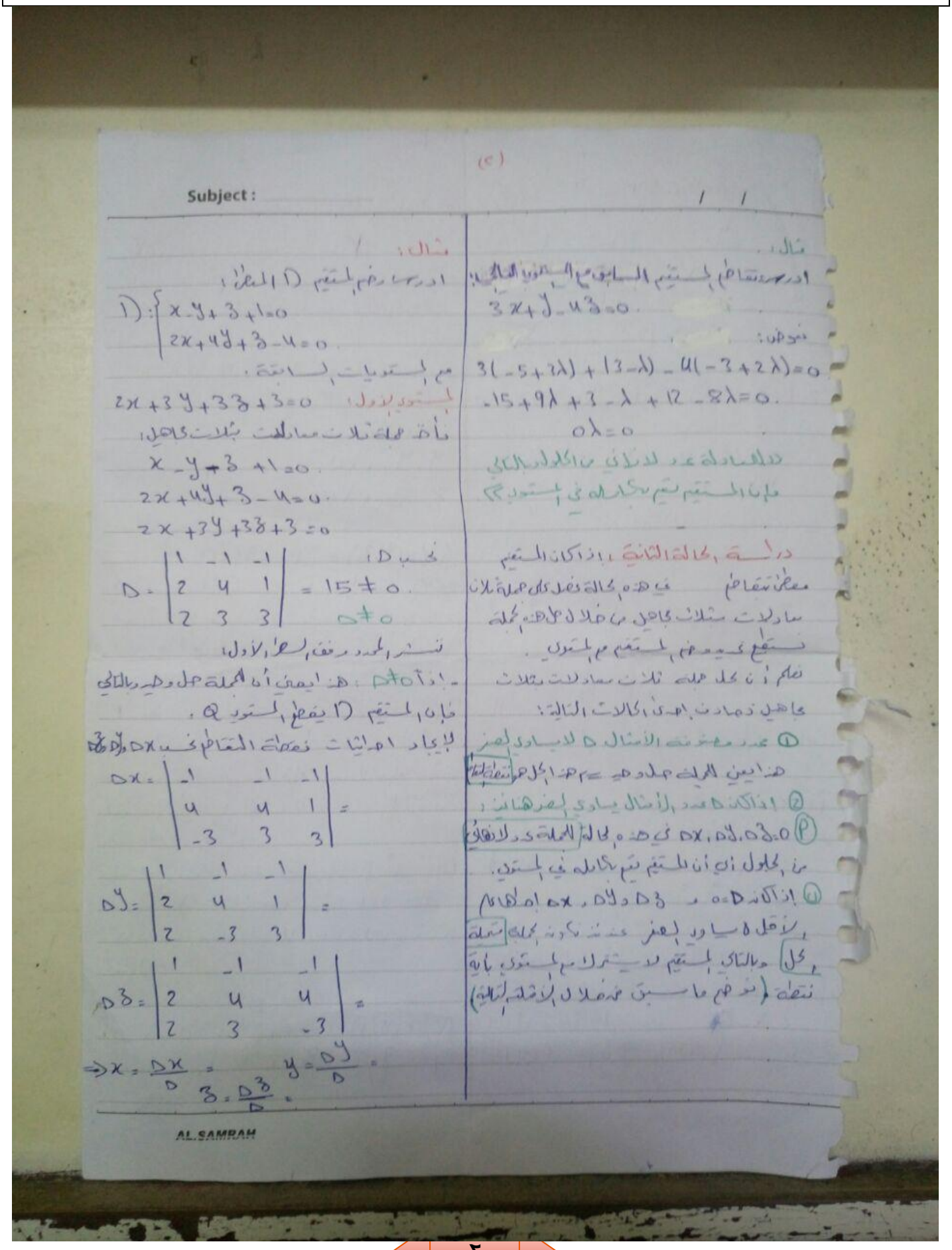
$3(-5+3\lambda) + (3-\lambda) - 4(-3+2\lambda) - 7 = 0$

$-(5+9\lambda) + 3\lambda + 12 - 8\lambda - 7 = 0$

$0\lambda = 7 \Rightarrow$ المعادلة مستحيلة الحل

وبالتالي المستقيم لا يتقاطع المستوي بأية نقطة

AL SAMDAH



مثال:
أدرس تقاطع المستقيم السابق مع المستوي التالي:
$3x+y-4z=0$.

الحل:
$3(-5+2\lambda)+(3-\lambda)-4(-3+2\lambda)=0$
$-15+9\lambda+3-\lambda+12-8\lambda=0$.
$0\lambda=0$
المعادلة عدد لانهائي من الحلول
فإن المستقيم يقع بكامله في المستوي P

الحالة الثانية: إذا كان المستقيم متقاطع في هذه الحالة نجد كل عملية ثلاث معادلات مثلث حاصل من خلال كل هذه الحلة نستنتج أن المستقيم متقاطع مع المستوي.
نعلم أن كل جملة ثلاث معادلات مثلث حاصل نميز بين ثلاث حالات التالية:
① عدد مجهول الأمثال D لا يساوي الصفر
هذا يعني الجملة حلها وحيد $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$, $z=\frac{D_z}{D}$
② إذا كان D عدد الأمثال يساوي الصفر هنا:
Ⓟ $D=0, D_x=0, D_y=0, D_z=0$ في هذه الحالة الجملة لا تقبل
نستنتج الحلول أن المستقيم يقع بكامله في المستوي.
Ⓠ إذا كان $D=0$ و D_x أو D_y أو D_z أحدهم لا تقبل الصفر عندئذ نكون الجملة الحل وبالتالي المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة (نتفهم ما سبق من خلال المثال التالي)

مثال:
أدرس وضع المستقيم (D) المعرف:
$(D):\begin{cases}x-y+3z+1=0\\2x+4y+3z-4=0\end{cases}$
مع المستويات التالية:
المستوي الأول: $2x+3y+3z+3=0$
نأخذ جملة ثلاث معادلات ثلاث حاصل:
$x-y+3z+1=0$
$2x+4y+3z-4=0$
$2x+3y+3z+3=0$
نحسب D:
$D=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&4&1\\2&3&3\end{vmatrix}=15\neq 0$.
$D\neq 0$
نستنتج حسب الحالة الأولى:
- إذا $D\neq 0$: هذا يعني أن الجملة حلها وحيد وبالتالي فإن المستقيم (D) يقطع المستوي Q.
لإيجاد احداثيات نقطة التقاطع نحسب D_x, D_y, D_z
$D_x=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\4&4&1\\-3&3&3\end{vmatrix}=$
$D_y=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&4&1\\2&-3&3\end{vmatrix}=$
$D_z=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&4&4\\2&3&-3\end{vmatrix}=$
$\Rightarrow x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$, $z=\frac{D_z}{D}$.

AL SAMRAH