Syria Math

التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : الثانية عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٢٢

إعداد : نذير تيناوي

التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

ليكن f(t) تابع معرف على]a, b] لنفرض أن $\int_x^b f(t)\,dt$ موجود من أجل كل قيم x التي تحقق الشرط $a < x \le b$ و $a < t \le b$ نسمي التكامل المعتل من النوع الثاني :

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt = \int_{a^+}^b f(t)\,dt$$

فإذا كانت النهاية السابقة موجودة و محدودة يكون التكامل متقارباً و قيمته تساوي قيمة النهاية السابقة أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو غير محدودة فيكون متباعداً

-أما إذا كان $f(t)$ معرفاً على المجال $[a, b[$ فالتكامل المعتل من النوع الثاني هو :

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{b^-} f(t)\,dt$$

فإذا كانت النهاية السابقة موجودة و محدودة يكون التكامل متقارباً و قيمته تساوي قيمة النهاية السابقة أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو غير محدودة فيكون متباعداً

-و في حال كان $f(t)$ معرف على المجال $]a, b[$ عندئذٍ:

$$\lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}} \int_x^y f(t)\,dt = \int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt \qquad : a < x < y < b$$

-و أخيراً إذا كان $f(t)$ معرف على $]a, \infty[$ عندئذٍ يرد التكامل $\int_a^\infty f(t)dt$ إلى تكاملين أحدهما معتل من النوع الأول و الآخر معتل من النوع الثاني كما يلي :

$$\int_a^\infty f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt$$

فهنا جزئنا التكامل إلى مجموع تكاملين أولهما معتل من النوع الثاني و الآخر معتل من النوع الأول.

مثال : ادرس تقارب التكامل :

$$I = \int_{0^+}^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad : s > 0$$

نلاحظ أن $x=0$ نقطة شاذة لأنه عندما تكون $0 < s < 1$ سيصبح لدينا $x = 0$ لذلك هي نقط شاذة

و أن التكامل المعطى يكتب بالشكل :

$$I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \int_{0+}^{1} e^{-x} x^{s-1} dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

وجدنا سابقاً أن التكامل $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ متقارب لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة للتكامل السابق مع التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ فنجد :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} x^{s-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ متقارب يكون التكامل $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ متقارباً

بقي لكي يتقارب التكامل المعطى أن ندرس تقارب تكامل $\int_{0+}^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ كما يلي :

لنضع $x = \frac{1}{u}$ عندئذٍ $dx = -\frac{du}{u^2}$ كما أن $x = 0 \Rightarrow u = \infty$ و $x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{0+}^{1} e^{-x} x^{s-1} dx = -\int_{\infty}^{1} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)} \left(\frac{1}{u}\right)^{s-1} \frac{du}{u^2} = \int_{1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)} u^{-s-1} du$$

إن التابع المكامل هنا يكتب بالشكل $\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}$ و لنطبق نعيار نهاية النسبة مع التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}} du$ فنجد أن :

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}}{\frac{1}{u^{s+1}}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{u}}} = 1 > 0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+1}} du$ متقارباً ((من الشكل $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx : p > 1$)) فإن

التكامل $\int_1^\infty e^{-\left(\frac{1}{u}\right)} u^{-s-1} du$ متقارب

مما سبق نخلص إلا أن التكامل $I = \int_{0+}^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ متقارب.

مثال ٢ :

ادرس تقارب التكامل $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

نلاحظ أن التكامل المعطى يعاني انقطاعاً عند طرفي المجال و بالتالي لنقسمه إلى تكاملين كما يلي :

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{b\to1}\left(\int_{-b}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{b}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{b\to1}\left([arcsinx]_{-b}^{0}+[arcsinx]_{0}^{b}\right)$$

$$=\lim_{b\to1}(-\arcsin(-b)+\arcsin(b))=\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

١) ليكن التكامل $\int_{x}^{b}f(t)\,dt$ موجود من أجل كل قيم x التي تحقق الشرط $a<x\leq b$ وأن $f(t)\geq0$ عندما $a<t\leq b$

الشرط اللازم و الكافي لتقارب التكامل $\int_{a^+}^{b}f(t)\,dt$ هو أن يوجد عدد ثابت $M>0$ بحيث يكون:

$$\int_{x}^{b}f(t)\,dt\leq M$$

وذلك أياً كان x الذي يحقق الشرط $a<x\leq b$

٢) بفرض أن التكاملين $\int_{x}^{b}f(t)\,dt$ و $\int_{x}^{b}g(t)\,dt$ موجودان من اجل جميع قيم x التي تحقق الشرط $a<x\leq b$

وأن $g(t)>0$ و $f(t)>0$ عندما $a<t\leq b$

فإذا وجد عدد موجب مثل c بحيث يكون $f(t)\leq c.g(t)$ أياً كان t من $]a,b]$ فإن تقارب $\int_{a^+}^{b}g(t)\,dt$ يقتضي تقارب $\int_{a^+}^{b}f(t)\,dt$ كما يكون:

$$\int_{a^+}^{b} f(t)\,dt \le c\int_{a^+}^{b} g(t)\,dt$$

٣) بفرض أن التكاملين $\int_x^b f(t)\,dt$ و $\int_x^b g(t)\,dt$ موجودان من أجل جميع قيم x

المحققة للشرط $a < t \le b$ حيث $g(t) > 0$ و $f(t) \ge 0$

عندما $a < t \le b$ وتحقق:

$$\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)}{g(t)} = c$$

فإذا كان $c > 0$ فإن التكاملين $\int_{a^+}^b f(t)\,dt$ و $\int_{a^+}^b g(t)\,dt$ من نوع واحد أي يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً.

وإذا كان $c = 0$ فإن تقارب $\int_{a^+}^b g(t)\,dt$ يقتضي تقارب التكامل $\int_{a^+}^b f(t)\,dt$

ملاحظة: إذا كان $F(x)$ تابع أصلياً للتابع $f(x)$ وكان $f(x)$ غير محدود عند النقطة a^+ (a^+ هي نقطة شاذة لـ $(f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a^+}^b f(x)\,dx = [F(x)]_{a^+}^b$$
$$= F(b) - F(a^+)$$

إذا كان $F(a^+)$ معرف (موجود ومحدود) فإن التكامل موجود(متقارب)

وإذا كان $F(a^+)$ غير موجودة عند هذه النقطة يكون التكامل متباعد.

مثال:

$$I = \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ نلاحظ أن $x = 0$ هي نقطة شاذة للتابع (أي غير مستمر عندها)

والآن لنوجد التابع الأصلي لـ $f(x)$

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^8 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\right]_0^8 = [F(x)]_0^8$$

التابع الأصلي هو $F(x) = \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}$ معرف ومستمر عند $x = 0$ لأن

$$\lim_{x \to 0} F(x) = 0$$

و $F(0) = 0$

وبالتالي النهاية تساوي القيمة أي التابع الأصلي مستمر عند النقطة $x = 0$

عندئذٍ قيمة التكامل

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} . 8^{\frac{2}{3}} = 6$$

مثال:

$$I = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

نلاحظ أن النقطة $x = 0$ الواقعة ضمن المجال هي نقطة شاذة للتابع $f(x)$ ولكن التابع الأصلي للتابع $f(x)$ مستمر عند هذه النقطة كما رأينا في المثال السابق.

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{8} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{12 - 3}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

نلاحظ أن $x = 1$ هي نقطة شاذة

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} . \sin^{-1} x \;\; dx$$

كما نلاحظ ان $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ هي مشتق الـ $\arcsin x$ و $\sin^{-1} x$ هي رمز آخر الـ $\arcsin x$

وبالتالي اصبح لدينا دالة بمشتقها

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\sin^{-1} x \; dx = \left[\frac{(\sin^{-1} x)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال خارجي:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1} dx$$

نلاحظ ان النقطتان $x = -1$, $x = 1$ هما نقطتان شاذتان للتابع $f(x)$

ومنه:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1} dx = [ln|x^2-1|]_{-1}^{1}$$

نلاحظ ان $F(x)$ غير مستمر عند النقطتين $x = 1, x = -1$

وبالتالي فإن التكامل $\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1} dx$ يكون متباعد حيث $F(1) = F(-1) = -\infty$

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي

Let's improve our mathematics