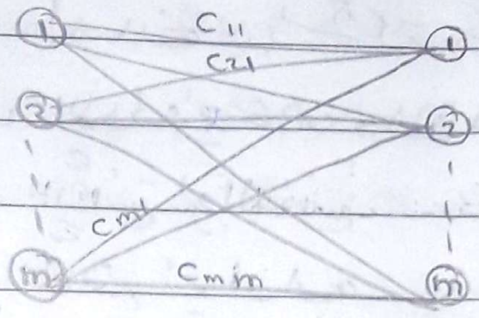
3/11/2016

المحاضرة الرابعة

"مسألة الإسناد"

الأشخاص　　　　　　الوظائف



تهدف مسألة الإسناد لتحقيق أقل كلفة وذلك لإسناد الأعمال حيث لدينا m شخص و m وظيفة.

- نفرض c_{ij} كلفة انجاز الشخص i للوظيفة j حيث:
الشخص يقوم بوظيفة واحدة والوظيفة يجب أن تنجز من قبل شخص واحد.

* النموذج الرياضي: "نفرض لدينا m شخص و m وظيفة"

1) تحديد المتغيرات: ليكن:

x_{ij} = هو قيام الشخص i بالوظيفة j أو لا.

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا لم يقم الشخص } i \text{ بالوظيفة } j \\ 1 & \text{إذا قام الشخص } i \text{ بالوظيفة } j \end{cases}$$

2) دالة الهدف:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

لأنه يهدف أقل كلفة

③ شروط المسألة:

1 شرط الأشخاص:

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im} = 1 \quad ; \quad i = 1, \ldots, m$$

2 شروط الوظائف: « الوظيفة يجب أن تُنجز »

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = 1 \quad ; \quad j = 1, \ldots, m$$

الوظيفة يجب أن يتم انجازها من قبل شخص واحد أي قيمة واحدة فقط من الـ $x_{1j}, \ldots, x_{mj}$ ستكون مساوية للـ (1) والباقي أصفار.

3 شروط ~~الوظائف~~:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Note: إذا كان عدد الأشخاص أكبر من عدد الوظائف فإن: الشرطين 2 و 3 سيبقيان كما هما ولكن الشرط 1 سيصبح:

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im} \leq 1$$

« إمّا أن يأخذ الشخص وظيفة أو لا يأخذ »

شروط إضافية للمسألة:

* إذا طلب أن تنجز الوظيفة الثالثة من قبل شخصين:

$$x_{13} + x_{23} + \cdots + x_{m3} = 2$$

باقي شروط الوظائف تبقى كما هي.

* إذا كان أن تنجز الوظيفة الثالثة من قبل شخصين على الأقل:

$$x_{13} + x_{23} + \cdots + x_{m3} \geq 2$$

③

* إذا كان الشخص 4 لا يستطيع القيام بالوظيفة 5:

إما نضع: $x_{45} = 0$

* أو أن نحذف x_{45} من كامل النموذج.

* طريقة هنغارين: "Hungarian Method":

تستخدم هذه الطريقة لحل مسائل إسناد m شخص لـ m وظيفة:

① في حالة كان عدد الأشخاص ≠ عدد الوظائف:

فنضيف أعمال "وظائف" إضافية لتحقيق المساواة وبكلفة تساوي الصفر.

② إذا كان الشخص i لا يستطيع القيام بالعمل j عندها نضع الكلفة تساوي عدد كبير موجب M أي:

$C_{ij} = M$.

... مراحل الخوارزمية: "Algorithem stepes":

1️⃣ من أجل كل سطر أطرح أصغر عدد في هذا السطر من كل عنصر من عناصر هذا السطر.

2️⃣ من أجل كل عمود أطرح أصغر عدد في هذا العمود من كل عنصر من عناصر هذا العمود.

3️⃣ نغطي جميع الأصفار الموجودة بخطوط أفقية أو عمودية وذلك بأقل عدد ممكن من الخطوط.

4️⃣ إذا كان عدد هذه الخطوط يساوي m عندها فإن الخوارزمية تنتهي والحل هو الحل الأمثل. "m هو عدد الأشخاص"

Sabbagh Stationery

5) أختار أصغر عدد غير مغطى بالخطوط السابقة ونطرح هذا العدد من جميع الأرقام الغير مغطاة ونضيفه إلى الأعداد المغطاة بخطين ثم نعود للخطوة 3 .

examples

وظائف / أشخاص	A 1	B 2	C 3
1 W	50	36	16
2 F	28	30	18
3 G	35	32	20
4 U	25	25	14

* اكتب النموذج الرياضي وحل المسألة حسب هنقاريين ؟

الحل: * النموذج الرياضي:

دالة الهدف:

$$\begin{aligned} Min\ & 50x_{11} + 36x_{12} + 16x_{13} \\ & + 28x_{21} + 30x_{22} + 18x_{23} \\ & + 35x_{31} + 32x_{32} + 20x_{33} \\ & + 25x_{41} + 25x_{42} + 14x_{43} \end{aligned}$$

* شروط المسألة:

1) $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \leq 1 \quad ; i = 1, \dots, 4$

لاحظ أن يجب كتابة الشروط بدون دلالة في أي هنا لدي 4 شروط أكتبهم الأربعة ولا أكتبهم بدلالة i .

2) $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} = 1 \quad j = 1, \dots, 3$

3 : $x_{ij} \in \{0,1\}$

- الآن الحل حسب هنغاريين :

نلاحظ قبل الحل أن عدد الأشخاص ≠ عدد الوظائف

لذلك نضيف وظيفة رابعة لتحقق المساواة ونضع

عليها صفراً كما يلي يصبح الجدول :

وظائف / أشخاص	A	B	C	D
W	50	36	16	0
F	28	30	18	0
G	35	32	20	0
U	25	25	14	0

نكتبه بالشكل :

$$\begin{pmatrix} 50 & 36 & 16 & 0 \\ 28 & 30 & 18 & 0 \\ 35 & 32 & 20 & 0 \\ 25 & 25 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

حسب الخوارزمية نطبق أ) لنجد أن كل سطر يحوي أصغر عنصر

هو الصفر ونطرحه من عناصر سطره تصبح المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 50 & 36 & 16 & 0 \\ 28 & 30 & 18 & 0 \\ 35 & 32 & 20 & 0 \\ 25 & 25 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

بتطبيق ② : أصغر عنصر في العمود الأول هو 25 و العمود الثاني هو 25 وفي العمود الثالث 14 والعمود الرابع 0 نطرح كل منهم من عموده لتصبح المصفوفة كما يلي :

$$\begin{pmatrix} 25 & 11 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 10 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نطبق الخطوة ③ نغطي الأصفار جميعها بأقل عدد ممكن من خطوط لتصبح كما يلي :

$$\begin{pmatrix} 25 & 11 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 10 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هنا رقم مغطى بخطين

نطبق الخطوة ⑤ إن أصغر عدد غير مغطى هو 2 نطرحه من جميع الأرقام الغير مغطاه ونضيفه للأرقام المغطاه بخطين :

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

نطبق ③ عدد مغطى بخطين أدخنا.

مازال عدد الخطوط 3 < 4 هو عدد الأسطر إذن نعيد الخطوة 5

⑦

نلاحظ أن أصغر عدد أصبح (1) :

$$\begin{array}{c|cccc} & ① & ② & ③ & ④ \\ \hline ① & \cancel{23} & \cancel{9} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ ② & 0 & 2 & 1 & 0 \\ ③ & 7 & 4 & 3 & 0 \\ ④ & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

هنا أصبح عدد الخطوط = عدد الأشخاص

ومنه هذا الحل الأمثل ،

1- إيجاد قيم هذا الحل الأمثل كما يلي :

- أن يقوم الشخص الأول بالوظيفة 3 .
- " " الثاني إما بالوظيفة 1 أو 4 .
- " " الثالث بالوظيفة 4 .
- " " الرابع إما بالوظيفة 3 أو 2 أو 1 .

«يجب أن يقوم كل شخص بوظيفة واحدة»

فيكون الحل الأمثل كما يلي :

- يقوم الشخص الأول بالوظيفة 3 .
- " " الثاني " 1 .
- " " الثالث " 4 .
- " " الرابع " 2 .

بالترجمة هذه الكتابة بمعادلات نجد :

$x_{13}=1$ و $x_{21}=1$ ، $x_{34}=1$

$x_{42}=1$

والباقي : $x_{ij} = 0$

ونلاحظ الوظيفة الرابعة وهمية ومنه فإن الشخص الثالث
لم يقوم بأي وظيفة .

الآن نحسب التكلفة :

$$16 + 28 + 0 + 25 = 69$$

(Homework)

حصلت 3 أعطال كهربائية بشركة صناعية . تقدمت 4 شركات لعروض لإصلاح هذه الأعطال وقدمت كل شركة تكلفة إصلاح كل عطل كما في الجدول التالي :

شركات / أعطال	شركة ①	شركة ②	شركة ③	شركة ④
عطل (1)	19	23	20	12
عطل (2)	11	x	12	30
عطل (3)	20	20	18	20

الـ x في الجدول تشير أن الشركة المقابلة لا تستطيع تصليح العطل المقابل .

تريد الشركة الصناعية أن تختار شركة واحدة للقيام بإصلاح عطل واحد فقط كما أنها تريد إصلاح جميع الأعطال .

المطلوب : ① كتابة النموذج الرياضي .
② إيجاد الحل الأمثل .

The end

52