Syria Math

مبادى الإحصاء والاحتمالات

الدكتور : احمد يونسو

المحاضرة :السادسة

التاريخ : ٣١/١٠/٢٠١٦

إعداد : زهرة + شهناز

المحاضرة السادسة ٣١/١٠/٢٠١٦م

إن التطبيق المباشر لتعريف في حساب التباين هو طريقة طويلة ومشاقة تعاني في الغالب من نقص في الدقة والطريقة الأسهل والأدق هي "التالية" للتطبيق بالأدوات الحاسبة ....

مبرهنة

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ عينة من القياسات فإن..

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

أو

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]$$

الإثبات

لدينا

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\, n\bar{x} + n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \cancel{n}\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^{\cancel{2}}\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

$$S^2 = \frac{1}{n(n-1)}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right]$$

و.هـ.م

مثال ...

احسب التباين باستخدام الطريقة المختصرة

2 , 4 , 7 , 5 , 12

نقوم بـ...

x_i	x_i^2
2	4
4	16
7	49
5	25
12	144
$\sum x_i = 30$	$\sum x_i^2 = 238$

ومن المبرهنة

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{5-1}\left[238 - \frac{(30)^2}{5}\right]$$

$$S^2 = \frac{58}{4} = 14.5$$

ومنه

$$S = \sqrt{14.5} = 3.8$$

مبرهنة ((متباينة تشيبيشيف))

ليكن $1 \leq k$

ولكن لدينا مجموعة القياسات

$x_1, x_2, \dots, x_n$

متوسطها $\bar{x}$ ، تباينها S^2 فإن نسبة

القياسات التي تقع ضمن المجال

$[\bar{x}-kS, \bar{x}+kS]$

هي على الأقل

$1-\frac{1}{k^2} \times 100\%$

الإثبات ...

نعتمد على تعريف تباينه

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

بالتالي

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad \dots (1)$$

ليكن

$I=[\bar{x}-kS, \bar{x}+kS]$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geq \sum_{x_i \notin I}(x_i-\bar{x})^2 \quad \dots (2)$$

حيث $I=[\bar{x}-kS, \bar{x}+kS]$

بالنسبة للقياسات التي تقع خارج المجال I

أي $(I \not\ni x_i)$

3) $\dots (x_i-\bar{x})^2 > (kS)^2 = k^2S^2$

$\bar{x}-kS \leq x_i \leq \bar{x}+kS \Longrightarrow x \in I$

$\bar{x}-kS > x_i \Longrightarrow x_i \notin I$

$\bar{x}+kS < x_i$

$\Longrightarrow (x_i-\bar{x}) < -kS$ أو $(x_i-\bar{x}) > kS$

$\Longrightarrow |x_i-\bar{x}| > kS$

$\Longrightarrow (x_i-\bar{x})^2 > (kS)^2$

لنفرض أن عدد القياسات التي هي خارج المجال I

يساوي p بالتالي بحسب 1 ، 3

$$\sum_{x \in I}(x_i-\bar{x})^2 > p\,k^2S^2$$

وبالتالي بحسب 1

$$(n-1)S^2 > pk^2S^2 = p(kS)^2$$

$$\Longrightarrow (n-1) > pk^2$$

وبالتالي

$$p < \frac{n-1}{k^2} < \frac{n}{k^2}$$

وبما أن p عدد القياسات التي تقع خارج المجال I

~~[illegible]~~ [illegible]

عدد القياسات التي هي خارج المجال I هي على الأكثر

$\frac{n}{k^2}$ أي نسبة $\frac{1}{k^2}$ وبالتالي

تكون نسبة القياسات داخل المجال على الأقل

$1-\frac{1}{k^2}$ أي $(1-\frac{1}{k^2})\times 100\%$

ملاحظة ...

أن المتباينة السابقة صحيحة أيضاً باستخدام

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

2

وعند أخذ بعض القيم لـ k في الجدول التالي

k	1	2	3
$1-\frac{1}{k^2}$	0	$\frac{3}{4} = 75\%$	$\frac{8}{9} = 89\%$
مجال	$\bar{x}-ks, \bar{x}+ks$	$\bar{x}-2s, \bar{x}+2s$	$\bar{x}-3s, \bar{x}+3s$

مثال ...

إذا كان معدل الرواتب لموظفي الدولة في إحدى الشركات والبالغ عددهم 1827 هو 3200 ليرة سورية بانحراف معياري قدره 200 ليرة سورية والمطلوب

1- تعيين المجال من الرواتب الذي تقع ضمنه على الأقل رواتب 1624 موظفاً...

2- تعيين المجال من الرواتب الذي تقع خارجه على الأكثر رواتب 406 موظفين...

الحل ...

لدينا $S = 200$ ليرة، $\bar{x} = 3200$

$n = 1827$

$\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \times n = 1624$ ومنه

1) $1-\frac{1}{k^2} \times 1827 = 1624$

$1-\frac{1}{k^2} = \frac{1624}{1827}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{k^2} = \frac{8}{9}$

$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

$I = [\bar{x}-ks, \bar{x}+ks] \Rightarrow$ مجال مطلوب

$I = [3200 - 3\times 200, 3200 + 3\times 200]$

$I = [2600, 3800]$

2) مجال الذي تقع خارجه رواتب 406 موظفاً على الأكثر هو نفسه مجال الذي تقع ضمنه على الأقل

$1827 - 406 = 1421$

$1-\frac{1}{k^2} = \frac{1421}{1827} = \frac{7}{9}$

$k = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftarrow$

وبالتالي فإن رواتب 406 موظفين على الأكثر تقع خارج مجال

$I = [\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$

$= \left[3200 - \frac{3}{\sqrt{2}}(200), 3200 + \frac{3}{\sqrt{2}}(200)\right]$

$= [2775.74, 3624.26]$ أي حسب المجال

وكون الرواتب أعداداً صحيحة فالمجال هو $[2776, 3625]$

انتهت المحاضرة...