نظرية
الاحتمالات

محاضرة 12

الأشعة العشوائية المستمرة:

- دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة:

تعريف: ليكن X, Y شعاعاً عشوائياً مستمراً إذا وجدت دالة غير سالبة $f(x,y)$ بحيث أنه من أجل أي عددين حقيقيين x و y يكون:

$$F(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv$$

عندئذ تسمى الدالة $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة للشعاع (X, Y) المستمر.

وهي تحقق الشرطان:

$$f(x,y) \geq 0 \quad , \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$ ①

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$ ②

ونجد أن:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

- الكثافات الهامشية:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

تمرين: ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة لها الشكل:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(3x+y) & ; \quad 1 \leq x < 5 \\ & \quad\ 0 < y < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

① عين قيمة الثابت الحقيقي c

② أوجد الكثافات الهامشية

③ احسب الاحتمالات: $P(2<X<4, Y>1)$ و $P(Y<2)$

الحل:

① بما أن $f(x,y)$ دالة كثافة مشتركة لـ (X, Y) فإنها تحقق الشرط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{5}\int_{0}^{3} c(3x+y)\,dy\,dx = 1$$

$$\Rightarrow c\int_{1}^{5}\left[3xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx = 1$$

$$\Rightarrow c.\int_{1}^{5}\left(9x+\frac{9}{2}\right)dx = 1$$

$$\Rightarrow c.\left[\frac{9x^2}{2}+\frac{9}{2}x\right]_1^5 = 1$$

$$\Rightarrow c.\frac{9}{2}\left((25+5)-(1+1)\right) = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{9.28} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{126}}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{126}(3x+y) & ; \ 0<y<3 \\ & \ \ 1<x<5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$= \int_0^3 \frac{1}{126}(3x+y)\,dy$

$= \frac{1}{126}\left[3xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^3$

$= \frac{1}{126}\left(9x + \frac{9}{2}\right) \quad ; \quad 1<x<5$

* $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$= \int_1^5 \frac{1}{126}(3x+y)\,dx$

$= \frac{1}{126}\left[\frac{3x^2}{2} + xy\right]_1^5$

$= \frac{1}{126}(4y+36) \quad ; \quad 0<y<3$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{126}\left(9x+\frac{9}{2}\right) & ; \ 1<x<5 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{126}(4y+36) & ; \ 0<y<3 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

③

$$P(Y<2) = \int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{126}(4y+36)\, dy$$

$$= \frac{1}{126}\left[2y^2+36y\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{126}(8+72) = \frac{80}{126}$$

$$P(2<X<4\ ,\ Y>1) = \int_2^4\int_1^3 \frac{1}{126}(3x+y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{126}\int_2^4 \left[3xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^3 dx$$

$$= \frac{44}{126}$$

تعريف: نقول عن متغيرين عشوائيين X ، Y أنهما مستقلان إذا تحقق أن:

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x)\,.\,f_Y(y)}$$

في حالة الـ تقطاع:

$$P(X=x\ ,\ Y=y) = P(X=x)\,.\,P(Y=y)$$

- الكثافة الشرطية:

ليكن (X,Y) متجهاً عشوائياً كثافته المشتركة $f(x,y)$
ودالتا الكثافة الهامشية $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ لـ X و Y على الترتيب
عندئذٍ: نعرف الكثافة الشرطية لـ X علماً أن Y وقوع (X مشروطاً بـ Y):

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

البرهان

$$= P(X=x\ /\ Y=y)$$

$$= \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

بالمثل يمكن تعريف:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

ملاحظة: اذا كان X و Y مستقلين فإن:

$$f_{X/Y}(x/y) = f_X(x)$$

$$f_{Y/X}(y/x) = f_Y(y)$$

تمرين: ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} + xy & ; \ 0 < x < 1 \\ & \ \ \ 0 < y < 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

① عيّن $f_{Y/X}(y/x)$

② احسب $P\left(Y > \frac{1}{2} \,/\, \underbrace{\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx}_{X = \frac{1}{2}}\right)$

الحل: ①

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

وبالتالي نحتاج لحساب

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{4} + xy\right) dy = \left[\frac{3}{4}y + x\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{x}{2} \quad ; \ 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow f_{Y/X}(y/x) = \frac{\frac{3}{4} + xy}{\frac{3}{4} + \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{3 + 4xy}{3 + 2x} \quad ; \quad 0 < y < 1$$

حيث من أجل قيم ثابتة لـ $0 < x < 1$

② $P\left(Y > \frac{1}{2} \,/\, \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx\right)$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_{Y/X}\left(y / x = \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3 + 4\left(\frac{1}{2}\right) y}{3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)} \, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{3}{4} + \frac{y}{2}\right) dy = \frac{9}{16}$$

تمرين: ليكن X ، Y متغيرين عشوائيين كثافتهما المشتركة:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + y}{210} & ; \quad 2 < x < 6 \; , \; 0 < y < 5 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

① برهن أن $f(x, y)$ دالة كثافة مشتركة احتمالية لـ (X, Y)

② عين الكثافات الهامشية لـ X و Y

③ احسب $P(3 < X < 4 \,,\, Y > 2)$

ثم احسب $P(X > 3)$

④ هل المتغيرين X و Y مستقلين ؟

Scanned by CamScanner

الحل: لدينا $f(x,y) \geq 0$ من أجل $2 < x < 6$ و $0 < y < 5$

ولنبرهن الشرط التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{210} \int_2^6 \int_0^5 (2x+y)\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{210} \int_2^6 \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^5 dx$$

$$= \frac{1}{210} \int_2^6 \left(10x + \frac{25}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{210} \left[5x^2 + \frac{25}{2} x \right]_2^6 = 1$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

$$= \int_0^5 (2x+y)\, dy$$

$$= \frac{1}{210} \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2}\right) \quad ; \quad 2 < x < 6$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{10x + \frac{25}{2}}{210} & ; 2 < x < 6 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بنفس الطريقة نجد أن

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{4y+36}{210} & ; 0 < y < 5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

/ /

$P(3 < X < 4 \,,\, Y < 2)$ ③

$$= \int_3^4 \int_2^5 \frac{1}{210} (2x + y)\, dy\, dx = \frac{3}{20}$$

$$P(X > 3) = \int_3^6 \underbrace{\frac{10x + \frac{25}{2}}{210}}_{f_X(x)} dx = \frac{69}{84}$$

④ نلاحظ أن $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(\frac{10x + \frac{25}{2}}{210}\right)\left(\frac{4y + 36}{210}\right)$

$$\neq$$

$$f(x, y) = \frac{2x + y}{210}$$

$\Leftarrow$ X و Y غير مستقلين.

انتهت المحاضرة الثانية عشر