نظرية الاحتمالات

<< الفصل الخامس >>

هام وكل امتحان يوجد سؤال منه

دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

١ـ الانتقال بمتغير عشوائي متقطع:

ليكن X متغيراً عشوائياً متقطعاً (منفصلاً) مجموعة قيمه.

$$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

وله الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x) = P[X = x] \quad , x \in R$$

وليكن Y متغير مرتبط بالمتغير Y بالعلاقة: $Y = U(x)$

عندئذٍ يمكن حساب مجموعة قيم Y وكذلك كثافته الاحتمالية بالحساب المباشر:

$$f_Y(y) = P[Y = y]$$

$$= P[U(X) = y_n]$$

$$= P[X = U^{-1}(y_n)]$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة التالي:

X	-1	-2	-3	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

عين جدول الكثافة الاحتمالية لـ $|X| = Y$

الحل: نلاحظ أن مجموعة قيم Y هي: $R_Y = \{1, 2, 3\}$

$$f_Y(1) = P[Y = 1] = P[|X|] = 1$$

$$= P[X = -1] + P[X = 1]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$f_Y(2) = P[Y = 2] = P[X = -2] + P[X = +2]$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$f_Y(3) = P[Y = 3] = P[X = -3] + P[X = 3]$$

$$= \frac{2}{6}$$

منكون جدول الكثافة لـ Y.

Y	1	2	3	المجموع
$f_Y(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{} & ; \; \mu = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = 4 \cdot X$

الحل: ان مجموعة قيم X هي: $R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

فتكون دالة الاحتمال لـ Y

$$f_Y(y) = P[Y = y] = P[4 \cdot X = y]$$

$$= P\left[X = \frac{y}{4}\right] = f_X\left(\frac{y}{4}\right)$$

$$= \frac{\mu^{\left(\frac{y}{4}\right)} e^{-\mu}}{\left(\frac{y}{4}\right)!} \quad ; \quad y = 0, 4, 8, \dots$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً جدول كثافته الاحتمالية

X	0	1	2	3	4	مجموع
$f_X(x)$	0,15	0,20	0,20	0,15	0,30	1

عين جدول كثافة المتغير $Y = (X - 2)^2$

الحل: ان مجموعة قيم X هي $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

فتكون مجموعة قيم Y هي

$$R_Y = \{0, 1, 4\}$$

وبالتالي يمكن حساب قيمة الدالة (قيم) دالة الكثافة لـ Y

$$f_Y(y) = P[Y = y]$$

$$\Rightarrow y = 0 \; : \; P[Y = 0] = P[X = 2] = 0,20$$

$$\Rightarrow y = 1 \; : \; P[Y = 1] = P[X = 1] + P[X = 3]$$

$$= 0,20 + 0,15 = 0,35$$

$\Rightarrow y = 4 \; : P[Y = 4] = P[X = 0] + P[X = 4]$

$0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45$

منكون لـ Y جدول الكثافة:

Y	0	1	4	$\sum$
$f_Y(y)$	0,20	0,35	0,45	1

2ـ الانتقال متغير عشوائي مستمر:

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً له الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ وليكن $Y = U(X)$ متغيراً معطى بدلالة X عندئذٍ يكون Y متغيراً عشوائياً مستمراً وكثافته تعين بالعلاقة:

$$f_Y(y) = f_X\left(U^{-1}(y)\right)\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right|$$ عليها ٣ علامات على الأقل

حيث $\left(U^{-1}(y)\right)' = X'_y$

مشتق X بالنسبة لـ Y.

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; \; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للتغير $Y = -2\ln x$

الحل: • بما أن $f_X(x)$ دالة كثافة مطلقة لـ X تحقق:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 (1)\,dx = [x]_0^1 = 1$$

$$Y = U(X) = -2\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{-Y}{2} = \ln X$$

$$\Rightarrow X = e^{-\frac{Y}{2}} = \ln X$$

$$\Rightarrow X = e^{-\frac{Y}{2}} = U^{-1}(y)$$

$$R_X = \{0 < x < 1\} \Rightarrow R_Y = \{0 < y < \infty\}$$

$$\left(U^{-1}(y)\right)'_y = \left(e^{-\frac{y}{2}}\right)'_y$$

$$X'_y = -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_X(U^{-1}(y)) = 1$$

فتصبح دالة الكثافة لـ Y :

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

$$= 1 \cdot \left| -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \right|$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$$

أي أن:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & 0 < y < +\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك ;} \end{cases}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته لها الشكل:

$$f_X(x) \begin{cases} 6x(1-x) & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين دالة الكثافة لـ $Y = X^3$

2) عين دالة الكثافة لـ $Z = 2X + 1$

الحل:

1)

$$Y = U(x) = X^3$$

$$\Longrightarrow X = U^{-1}(y) = Y^{\frac{1}{3}}$$

ومن أجل $0 < x < 1$ فإن $0 < y < 1$

وبالتالي فإن:

$$(U^{-1}(y))'_y = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

نطبق العلاقة لإيجاد دالة الكثافة لـ Y :

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

$$= \underbrace{6(y^{\frac{1}{3}})(1 - y^{\frac{1}{3}})}_{= f_X(x)} \cdot \left| \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \right|$$

$$= 2(y^{-\frac{1}{3}} - 1)$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2\left(y^{-\frac{1}{3}} - 1\right) & ; \quad 0 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

②

$$Z = U(X) = 2X + 1$$

$$\Longrightarrow X = U^{-1}(Z) = \frac{Z-1}{2}$$

ومن أجل $0 < x < 1$ فإن $1 < y < 3$

فيكون: $\left(U^{-1}(z)\right)'_z = \frac{1}{2}$

نطبق العلاقة لإيجاد $f_Z(z)$

$$f_Z(z) = f_X\left(U^{-1}(z)\right) \left|\left(U^{-1}(z)\right)'_z\right|$$

$$= 6\left(\frac{Z-1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{Z-1}{2}\right)\right)\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{3}{4}Z^2 + 3Z - \frac{9}{4} & ; \quad 1 < Z < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

عين كثافة $Y = X^2$

الحل:

$$Y = U(X) = X^2 \Longrightarrow X = U^{-1}(Y) = \mp Y^{\frac{1}{2}}$$

ومن أجل $-\infty < x < +\infty$ فإن $0 < Y < +\infty$

الآن لدينا

$$\left(U^{-1}(y)\right)'_y = \mp \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow \left|\left(U^{-1}(y)\right)'_y\right| = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

نطبق العلاقة لإيجاد $f_Y(y)$

$$P(X = \mp x) = P(X = x) + P(X = -x)$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot \left| (U^{-1}(y))' \right|$$

$$= \left[f_X(-y^{\frac{1}{2}}) + f_X(+y^{\frac{1}{2}}) \right] \left| \mp \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right|$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-|-y^{\frac{1}{2}}|} + \frac{1}{e} e^{-|+y^{\frac{1}{2}}|} \right] \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-y^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{-y^{\frac{1}{2}}}}{2y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & ; \quad 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة $Y = X^2$

الحل:

$$Y = U(X) = X^2 \Rightarrow X = U^{-1}(Y) = \mp Y^{+\frac{1}{2}}$$

عندما $-1 \leq x \leq 1$ فإن $0 \leq Y \leq 1$

ولنوجد

$$(U^{-1}(y))'_y = \mp \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

نطبق العلاقة لايجاد $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot \left| (U^{-1}(y))'_y \right|$$

$$= \left[p_X\left(-y^{\frac{1}{2}}\right) + p_X\left(y^{\frac{1}{2}}\right) \right] \cdot \left| \mp \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right|$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \right] \left(\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} & ; \quad 0 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة الثالثة عشر