البنى الجبرية 1

الدكتور: حمزة الحاكمي

المحاضرة : الخامسة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١١/١٤

إعداد : أحمد أبو التوت

مبرهنة : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G كل زمرة جزئية في الزمرة G/H هي من الشكل N/H حيث N زمرة جزئية في G تحوي H .

الاثبات :

لتكن $\bar{N}$ زمرة جزئية في الزمرة G/H ولنأخذ المجموعة :

$$N = \{a : a \in G \quad , \quad aH \in \bar{N}\}$$

محايد الزمرة G

واضح أن $\emptyset \neq N \subseteq G$ لأن $H = H \in \bar{N}$. $\tilde{e}$

ومنه $e \in N$.

لنبرهن أن N زمرة جزئية في G

ليكن $x, y \in N$ عندئذ:

$$x.H \ , y.H \in \bar{N}$$

حيث $\bar{N}$ زمرة جزئية فإن : $(xH).(yH)^{-1} \in \bar{N}$

حسب تعريف المقلوب في زمرة الخارج نجد : $(xH).(y^{-1}H) \in \bar{N}$

حسب تعريف الجداء في زمرة الخارج نجد : $(x.y^{-1}).H \in \bar{N}$

حيث $x.y^{-1}$ يولد مرافقة تنتمي إلى $\bar{N}$.

وهذا يبين أن $(x.y^{-1}) \in N$ ومنه N زمرة جزئية في G .

ولنبرهن الآن إنها تحوي H

$$hH = H \in \bar{N} \quad \text{فإن} \quad \forall\, h \in H$$

وحسب تعريف N فإن $h \in N$ وهذا يبين أن $H \subseteq N$.

لنبرهن الان أنها من الشكل N/H أي لنبرهن أن $\bar{N} = \mathrm{N/H}$

لدينا H زمره جزئية ناظمية في G وأن $H \subseteq N$ ومنه فإن H ناظمية في N وبالتالي فإن N/H زمرة

ليكن $\bar{x} \in \bar{N}$ عندئذ حسب تعريف $\bar{N}$ فإن $\bar{x} = x.H$

حيث $x \in G$ ولما كان $x.H \in \bar{N}$ عندئذ وحسب تعريف N فإن $x \in N$ ومنه فإن :

$$\overline{x} = x.H \in N/H$$

$$\Longrightarrow \overline{N} \subseteq N/H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $\bar{y} \in N/H$ عندئذ $\bar{y} = y.H$ حيث $y \in N$ ومنه حسب تعريف N فإن

$N/H \subseteq \overline{N}$ وهذا يبين أن $\bar{y} = y.H \in \overline{N}$

ومن الاحتوائين نجد :

$$\overline{N} = N/H$$

مبرهنة (وظيفة) : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G اذا كانت G تبديلية فإن G/H تبديلية , اذا كانت G دوارة فإن G/H دوارة .

التشاكلات الزمرية (homomorphism)

تعريف :

لتكن G و G' زمرتين و $f : G \to G'$

نسمي التطبيق f تشاكل زمري إذا حقق الشرط :

$$\forall a, b \in G \ : \ f\left(\underbrace{a}_{\text{معرف على}(G,.)} \underbrace{b}_{\text{معرف على}(G,.)}\right) = \underbrace{f(a)}_{\text{معرف على}(G',.)} \underbrace{f(b)}_{\text{معرف على}(G',.)}$$

تعريف :

ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري نسمي المجموعة :

$$\ker(f) = \{a : \ a \in G \ ; \ f(a) = e'\}$$

نواة التشاكل f حيث e' حيادي الزمرة G' .

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري عندئذ :

١) $f(e) = e'$

٢) $f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$ فإن $\forall g \in G$

٣) $f(g^n) = [f(g))]^n$; $\forall g \in G \ , \ n \in Z$

٤) $\ker(f)$ هي زمرة جزئية ناظمية في G.

الاثبات :

١) لدينا $e.e = e$

نأخذ صورة مباشرة للجداء $f(e) = f(e.e) = f(e).\underbrace{f(e)}_{\epsilon\ G'}$

سنضرب بـ $(f(e))^{-1}$ للطرفين $(f(e))^{-1}.f(e) = (f(e))^{-1}.f(e).f(e)$

$$e' = f(e)$$

٢) $\forall\ g\ \epsilon\ G$ عندئذ $g.g^{-1} = e$ فإن :

$$f(g.g^{-1}) = f(e) \implies f(g).f(g^{-1}) = e'$$

نضرب بمقلوب $f(g)$ نجد :

$$\underbrace{[f(g)]^{-1}.f(g)}_{\text{محايد}}.f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$$

$$\implies f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$$

$g^0 = e$ ينتج المحايد $n = 0$

و إذا كان n<0

$\underbrace{g^{-1}, g^{-1}, \dots\dots . g^{-1}}_{\text{مرة}-n}$

٣) $f(g^n) = f(\underbrace{g.g.\dots\dots .g}_{\text{مرة } n})$

$$f(g).f(g)\dots\dots .f(g) = [f(g))]^n$$

٤) $\ker f = \{x :\ x\ \epsilon\ G\ \ ;\ f(x) = e'\}$

ومن خلال التعريف ينتج أن $\emptyset \neq \ker f \subseteq G$ لأن $f(e) = e' \implies e\ \epsilon \ker f$

لإثبات أنها زمرة جزئية :

ليكن $x, y\ \epsilon\ \ker f$ عندئذ $f(x) = e'\ ,\ f(y) = e'$

$$f(x.y^{-1}) = f(x).f(y^{-1}) = f(x).f(y)^{-1}$$

$$= e'.[e']^{-1} = e' \implies x, y^{-1} \epsilon\ \ker f$$

ومنه $\ker f$ زمرة جزئية .

لنثبت أنها ناظمية :

ليكن $a\ \epsilon\ G$ ولنبرهن أن $a.\ker f\ .a^{-1} \subseteq \ker f$

وأن $z\ \epsilon\ a.\ker f\ .a^{-1}$ عندئذ يوجد $x\ \epsilon \ker f$ بحيث :

$$z = a.x.a^{-1}$$

نأخذ الصورة المباشرة لـ z $\quad f(z) = f(a.x.a^{-1}) = f(a).f(x).f(a^{-1})$

$$= f(a).e'.f(a^{-1}) = e'$$

وهذا يبين أن $z \in \ker f$ ومنه $a.\ker f\ .a^{-1} \subseteq \ker f$

ومنه $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G .

تمهيدية : لتكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري ولتكن H زمرة جزئية في G عندئذ :

١) $f(H)$ زمرة جزئية في G' .
٢) إذا كانت H تبديلية فإن $f(H)$ تبديلية .
٣) إذا كانت H دوارة فإن $f(H)$ دوارة .
٤) إذا كانت H ناظمية في G فإن $f(H)$ ناظمية في $f(G)$.

الاثبات :

١) بما أن f تطبيق و H مجموعة جزئية في G فإن
$f(H) = \{f(h) : \forall\ h \in H\ \}$ الصورة المباشرة للمجموعة H.

$$\emptyset \neq f(H) \subseteq G'$$

لأن $e \in H\ ;\ f(e) \in f(H) = e'$

لنثبت أن $f(H)$ زمرة جزئية .

$\forall\ x, y \in f(H)$

حيث $y = f(h_2)$ و $x = f(h_1)$: $h_1, h_2 \in H$

$$x.y^{-1} = f(h_1).\left(f(h_2)\right)^{-1} = f(h_1).f({h_2}^{-1})$$

$$= f\left(\underbrace{h_1.{h_2}^{-1}}_{\in H}\right) \in f(H)$$

$\Rightarrow f(H)$ زمرة جزئية في $\bar{G}$

٢) **وظيفة** :

بما أن H تبديلية $x.y = y.x$: $\forall\ x, y \in H$

$$\exists\ a\ ,b\ \epsilon f(H)$$

حيث : $f(y)=b$ و $f(x)=a$

ولأن f تشاكل .

$$f(x).f(y)=f(x.y)$$

ولأن H تبديلية :

$$f(x).f(y)=f(x.y)=f(y.x)=f(y).f(x)$$

٣) **وظيفة** : $H=<a>\ ;\ a\epsilon H$

لنثبت أن $f(H)=<f(a)>$

$$a\epsilon H\ \Longrightarrow f(a)\epsilon f(H)$$

ولدينا $f(a)\epsilon <f(a)>$

$<f(a)>\subseteq <f(H)>$ ((كون $<f(a)>$ أصغر زمرة جزئية تحوي $f(a)$))

$x\epsilon H$: عندئذ $y=f(x)\epsilon f(H)$

$n\epsilon Z$: $x=a^n$

ومنه $y=f(x)=f(a^n)=[f(a)]^n\epsilon <f(a)>$

$$f(H)\subseteq <f(a)>$$

ومن الاحتوائين نجد أن :

$f(H)=<f(a)>$ ومنه $f(H)$ دوارة .

٤) لنفرض أن H ناظمية في G ولنبرهن على أن

$\forall\ g\in f(G)$ فإن $g.f(H).g^{-1}\subseteq f(H)$

وليكن $z\epsilon a.f(H).a^{-1}$ عندئذ :

$x\epsilon f(H)$: $z=g.x.g^{-1}$ ومنه :

$$h_0\epsilon H\ :\ x=f(h_0)$$

ايضاً لما كان $g\in f(G)$ فيوجد $b\epsilon G$ بحيث $f(b)=g$ ومنه نعوض

نعوض $z = g.x.g^{-1} = f(b).f(h_0).f(b)^{-1} = f\left(\underbrace{b.h_0.b^{-1}}_{\epsilon H}\right)$

لأنه لما كانت H ناظمية في G فإن $b.h_0.b^{-1} \epsilon H$ ومنه

$$z = f(b.h_0.b^{-1}) \epsilon\ f(H)$$

وهذا يبين أن الزمرة الجزئية H ناظمية في $f(G)$.

ملاحظة : $f(G)$ هي المستقر الفعلي اما G' فهي المستقر ودوما

$$f(G) \subseteq G'$$

وعندما يكون التطبيق غامر يكون $f(G) = G' \Leftrightarrow$

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكلا زمريا ولتكن $\bar{k}$ زمرة جزئية في G' عندئذ :

١) المجموعة $\{a : a \epsilon G \ :\ f(a) \epsilon \bar{k}\}$ تشكل زمرة جزئية في G ((هذه المجموعة تدعى بالصورة العكسية للمجموعة $\bar{k}$ و تكون عناصرها مجموعة عناصر المنطلق التي صورها تنتمي إلى $\bar{k}$))

٢) إذا كانت $\bar{k}$ ناظمية في G' فإن $f^{-1}(\bar{k})$ ناظمية في G .

٣) f متباين $\Leftrightarrow \ker f =< e >$

الاثبات :

١) $\emptyset \neq f^{-1}(\bar{k}) \subseteq G$ لأن $e \epsilon G\ ;\ f(e) = e' \epsilon\ \bar{k}$

ليكن $x, y \epsilon f^{-1}(\bar{k})$ عندئذ $f(x), f(y) \epsilon\ \bar{k}$ و طالما $\bar{k}$ زمرة جزئية فإن

$$f(x).(f(y))^{-1} \epsilon\ \bar{k}$$

وبما أن f تشاكل فإن :

$$f(x), f(y^{-1}) \epsilon\ \bar{k} \Rightarrow f(x.y^{-1}) \epsilon\ \bar{k}$$

وهذا يبين أن $f^{-1}(\bar{k})$ زمرة جزئية في G .

٢) لنفرض أن $\bar{k}$ ناظمية في G' ولنبرهن أن :

$$\forall\ g \epsilon G\ ;\ \ g.f^{-1}(\bar{k}).g^{-1} \subseteq f^{-1}(\bar{k})$$

ليكن $x \epsilon\ g.f^{-1}(\bar{k}).g^{-1}$ عندئذ يوجد $y \epsilon\ f^{-1}(\bar{k})$ بحيث

$$x = g.y.g^{-1} \epsilon G$$

لنأخذ الصورة المباشرة له :

$$f(x) = f(g.y.g^{-1})$$

بما أن f تشاكل فإن :

$$f(x) = f(g).f(y).f(g^{-1}) = f(g).f(y).f(g)^{-1} \in \bar{k}$$

وهذا يبين أن $f^{-1}(\bar{k})$ ناظمية في G . وبالتالي $x \in f^{-1}(\bar{k})$

٣) $\Leftarrow$لنفرض أن $\ker f =< e >$ ولنبرهن أن f متباين :

ليكن $x, y \in G$ بحيث $f(x) = f(y)$ ولنضرب بمقلوب $f(y)$

$$f(x).(f(y))^{-1} = e'$$

بما أن f تشاكل فإن :

$$f(x.y^{-1}) = e'$$

((صورة العنصر المحايد من G يساوي المحايد في G' فإن العنصر موجود في النواة))

$$x.y^{-1} \in \ker f =< e > \Rightarrow x.y^{-1} = e \quad \Rightarrow x = y$$

ومنه f متباين .

$\Rightarrow$ لنفرض أن f متباين ولنثبت أن $\ker f =< e >$

ليكن $x \in \ker f$ عندئذ $x \in G$

$$f(x) = e' = f(e)$$

ولما كان f متباين فإن $x = e$ ومنه $\ker f =< e >$

"انتهت المحاضرة "

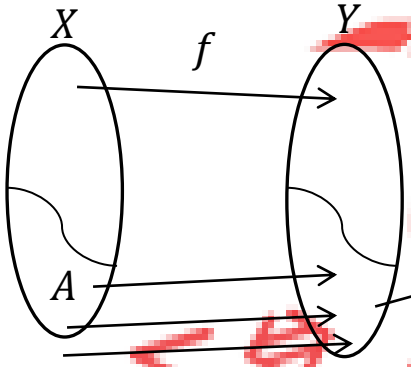
في نهاية هذه المحاضرة و لكوننا استخدمنا مفاهيم الصورة المباشرة و الصورة العكسية و سنستخدمها لاحقاً فلا بد أن نمر على ذكرها و مراجعة تعارفها ..فإليكم ما يلي ☺ :

الصورة المباشرة والصورة العكسية :

ليكن التطبيق $f : X \to Y$ وليكن $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ عندئذ نعرف الصورة المباشرة لـ A وفق التطبيق f ونرمز لها بـ $f(A)$ بأنه المجموعة :

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$$

مجموعة صور عناصر المجموعة A

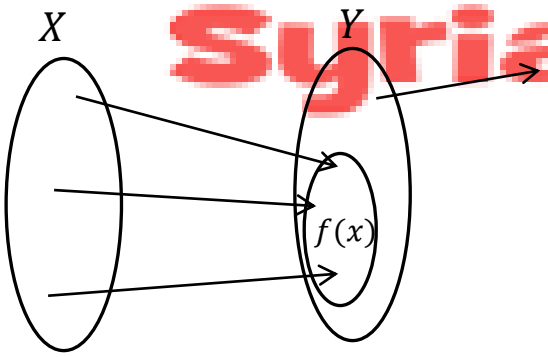


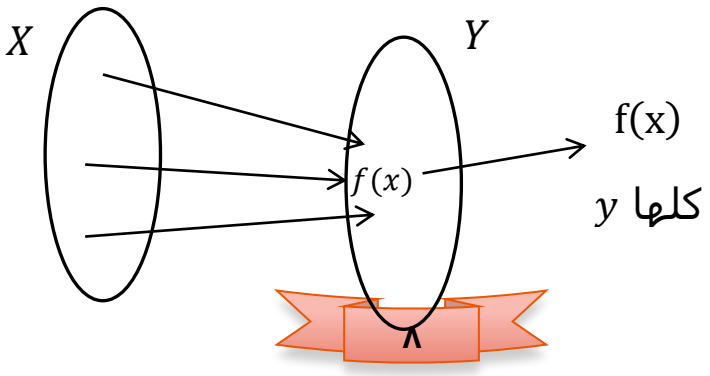
- ونرمز للصورة المباشرة لمجموعة المنطلق بأكمله بالرمز $I_m(f)$ أي أن :

$$f(A) = I_m f = f(X) \subseteq Y$$

تسمى المستقر الفعلي للتطبيق f

وعندما تتحقق المساواة $f(X) = y$ $\Leftrightarrow$ f تطبيق غامر.





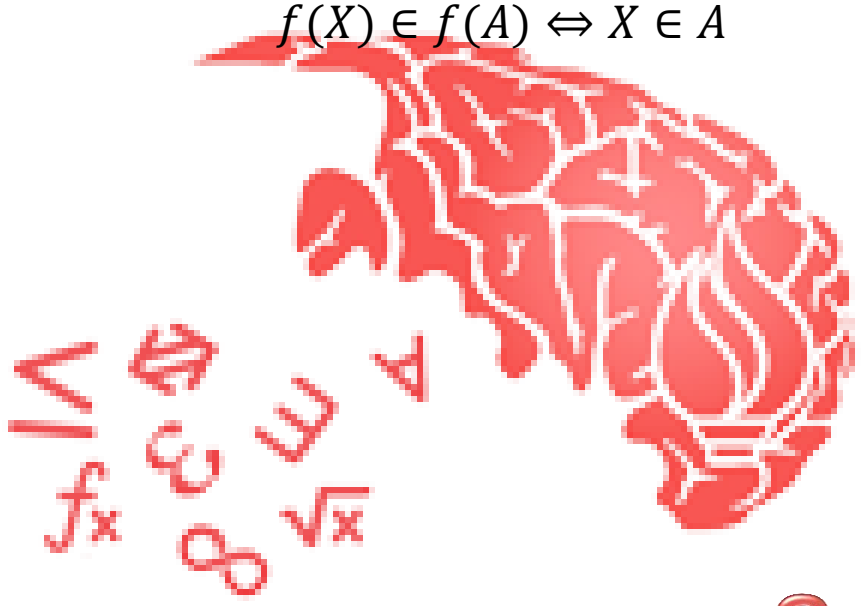
- نعرف الصورة العكسية للمجموعة B وفق التطبيق f ونرمز لها بـ $f^{-1}(B)$

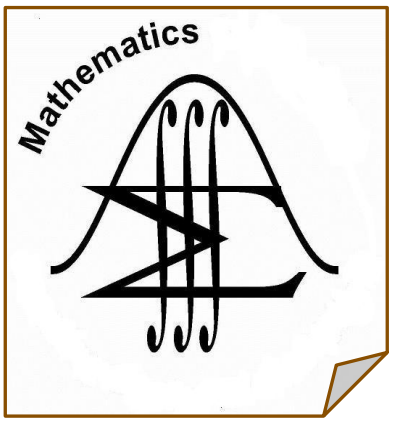
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\} \subseteq X$$

الصورة العكسية للمستقر بأكمله $X = f^{-1}(Y)$

ملاحظة: ١) $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

٢) $f(X) \in f(A) \Leftrightarrow X \in A$





Syria Math ☺
Syria Math