Syria Math

جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : العاشرة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/١٣

إعداد : منى + فاطمة

Subject: 13/11/2016 الأحد 13 / 11 / 1 : فاطمة يوسف

* محاضرة ~~[illegible]~~ العاشرة *

« المحاضرة 15 » ـــ «
جبر خطي (1) ـــ ^_^

* طريقة أخرى لحساب مقلوب مصفوفة مربعة في طريق التحويلات السطرية الأولية ـــ

1. ناخذ أولاً المصفوفة الموسعة : $A \mid I_n$ في المرتبة $(n \times n)$
نفس مرتبة $A \Leftarrow$

2. نجري تحويلات أولية سطرية على المصفوفة $A \mid I_n$ حتى نحصل على المصفوفة $I_n \mid B$

3. تكون B هي مقلوب المصفوفة A أي أن : $B = A^{-1}$

تطبيق : إعادة حساب مقلوب المصفوفة C في التطبيق السابق بالطريقة الثانية « التحويلات السطرية » ..

الحل :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C \mid I_n) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \quad R_1 \to \frac{1}{2} R_1$$

Subject :   / /

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\sim R_2 \to R_2 - 2R_1$

$R_1 \to R_3 - 2R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\sim R_2 \to -R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\sim R_3 \to R_3 - 2R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$\sim$

$R_3 \to \frac{1}{4} R_3$

Subject :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\sim \quad R_1 \to R_1 - \frac{1}{2} R_3$

$R_3 \to R_2 - 2R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow (I_n \mid B)$

$\Rightarrow B = A^{-1}$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{bmatrix}$$

ناقش قيمة الوسيط λ

وأوجد مقلوب المصفوفة A

Subject :

الحل

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = -\lambda - (-5-1) + 3(\lambda - 0)$$

$$= -\lambda + 12 - 3\lambda = 12 - 4\lambda$$

$\det(A) = 0$ عندما $\lambda = -3$

لأن المصفوفة A فتكون مقلوبة من أجل: $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

الإثبات:

١. لتكن المصفوفات $A, B \in M_n(F)$ قابلتان للقلب عندئذٍ:

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

الإثبات:

$$(A.B)(A.B)^{-1} = (A.B).(B^{-1}.A^{-1})$$
$$= A(B.B^{-1}).A^{-1}$$
$$= A.I_n.A^{-1} = A.A^{-1} = I_n$$

$$(A.B)(A.B)^{-1} = (B^{-1}.A^{-1}).(A.B) =$$
$$= B^{-1}.(A^{-1}.B^{-1}).B$$
$$= A^{-1}.I_n.B = B^{-1}.B$$
$$= I_n$$

ويمكن تعميم ذلك على عدد منته من المصفوفات القابلة للقلب

$$(A_1.A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}.A_{n-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$$

3

Subject :

«تشابه المصفوفات»

تعريف: نقول عن مصفوفتين $A, B \in M_n(F)$ أنهما متشابهتين إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة مثل $P \in M_n(F)$ قابلة للقلب حيث $B = P.A.P^{-1}$ وعندها تكون B, A متشابهات.

مثال: المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -\frac{51}{2} & 12 \end{pmatrix}$$

متشابهات لأنه يوجد المصفوفة

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

قابلة للقلب حيث:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا $P.A.P^{-1} = B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -\frac{51}{2} & 12 \end{pmatrix}$$

$B = \checkmark \Rightarrow B, A$ متشابهات.

AL.SAMRAH

٥

Subject : / /

نتيجة: إن تشابه مصفوفتين يشكل علاقة تكافؤ لأن:

1) أي مصفوفة تشابه نفسها في $M_n(F)$

2) إذا كانت A تشابه المصفوفة B فإن B تشابه A حيث: $B = P.A.P^{-1}$

نضرب الطرفين بـ P^{-1} في اليسار:

$$P^{-1}.B = P^{-1}.P.A.P^{-1}$$

نضرب الطرفين بـ P في اليمين:

$$P^{-1}.B.P = P^{-1}.P.A.P^{-1}.P$$

$$P^{-1}.B.P = I_n.A.I_n$$

$$P^{-1}.B.P = A$$

«أي أن علاقة التشابه تناظرية»

3) إذا كانت A تشابه B و B تشابه C فإن C تشابه A لأن:

A تشابه B ← يوجد مصفوفة P قابلة للقلب بحيث

$$C = Q.B.Q^{-1}$$

وبالتالي:

$$C = Q.B.Q^{-1}$$
$$= Q.(P.B.P^{-1}).Q^{-1}$$
$$= (Q.P).A.(P^{-1}.Q^{-1})$$
$$= (Q.P).A.(Q.P)^{-1}$$

★ انتهت محاضرة ★

AL SAMRAH