ي

Syria Math

التحليل العددي ا

الدكتورة: رشا بعاج

المحاضرة : التاسعة

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٩

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

مرحبا اصدقائي: نكمل معكم زملائي بحثنا الذي كان بعنوان "الاستيفاء بكثيرات الحدود"

تناولنا في محاضراتنا السّابقة حدوديّات استيفاء لاغرانج، ودراسة الخطأ في حدوديّة استيفاء لاغرانج والآن في محاضرتنا هذه سندرس:

- حدوديّة استيفاء نيوتن ومثال عنها
- دراسة الخطأ في حدوديّة استيفاء نيوتن ومثال عنها أيضاً

لنبدأ:

حدوديّة استيفاء نيوتن:

بفرض لدينا $n+1$ نقطة، ولتكن $p_n(x)$ حدوديّة تستوفي جميع هذه النّقاط

- بناءً على بعض الاستنتاجات وصلنا إلى هذه العلاقة

$$\begin{aligned}p_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\ &+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &\dots\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

تنويه: إذا أضفنا النّقطة (x_{n+1},y_{n+1}) ستضاف إلى الحدوديّة فتصبح الحدوديّة

$$\begin{aligned}p_{n+1}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\ &+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &\dots\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1})\\ &+a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)\end{aligned}$$

حيث أنّ $(x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ النّقاط المعطاة والآن لنقم بتعيين الثوابت $a_0,a_1,\dots,a_n$

لإيجاد $p(x_0)$ نعوّض $x=x_0$

$$\begin{aligned}p_n(x_0) &= a_0 + a_1(x_0-x_0) + a_2(x_0-x_0)(x-x_1) + \cdots\\ &+ a_n(x_0-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

أيّ: $p(x_0) = y_0 \implies \boxed{a_0 = y_0}$

حيث أنّ $y_0 = f(x_0)$

لإيجاد $p(x_1)$ نعوّض $x=x_1$

$$\begin{aligned}p_n(x_1) &= a_0 + a_1(x_1-x_0) + a_2(x_1-x_0)(x_1-x_1) + \cdots\\ &+ a_n(x_1-x_0)(x_1-x_1)\dots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

حيث $y_1 = f(x_1)$ نلاحظ أن هناك حدود ستنعدم قيمته و يبقى

$$p_n(x_1) = y_1$$

$$\Longrightarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

نعوّض $a_0 = y_0$

$$y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$\Longrightarrow a_1(x_1 - x_0) = y_1 - y_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]}$$

لإيجاد $p_n(x_2)$ نعوّض $x = x_2$

حيث $y_2 = f(x_2)$

$$p_n(x_2) = y_2$$

$$p_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + a_3(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) + \cdots + a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$\boxed{a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}}$$

.....

$$\boxed{a_n = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}}$$

اصطلحنا أن نرمز لكل مقدار من الشكل

$$a_n = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

مهما تكن n

☺للتسهيل: لمعرفة البسط:

$$f[\underbrace{x_0, \overbrace{x_1, \dots \dots, x_{n-1}}^{\text{الحد الأوّل}}}_{\text{الحد الثّاني}}, x_n]$$

وبدلاً من حفظنا و تعاملنا مع قوانين نستطيع أن نستعين بجدول يسهّل علينا الحلّ في إيجاد الحدوديّة ونستطيع من خلاله تعيين الثوابت $a_0, a_1, \dots, a_n$ بكل سهولة

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	x_0	a_0 y_0			
			a_1 $f[x_0,x_1]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$		
1	x_1	y_1		a_2 $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
			$f[x_1,x_2]=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ a_3 $=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
2	x_2	y_2		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
			$f[x_2,x_3]=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$		
3	x_3	y_3			

مثال : استخدم صيغة نيوتن في إيجاد حدوديّة الاستيفاء من الدّرجة الرّابعة التي تستوفي النّقاط الآتية

i	0	1	2	3	4
x_i	0	5	7	8	10
$f(x_i)$	0	2	-1	-2	20

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x)(x-5) + a_3(x)(x-5)(x-7) + a_4(x)(x-1)(x-7)(x-8)$$

وحتى يتم هذا فإنّه يتوجب علينا تعيين a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 لذا نقوم ببناء جدول الفروق المقسومة كما يلي:

((لاحظ أنه رسم في الجدول التالي مثلث القيم التقدمية و... لنيوتن والتي نستخدمها في دراستنا هي المتواضعة على لقيم العلوي من الضلع المثلث))

i	x_i	$f(x_i)$				
0	0	a_0 0				
			a_1 $f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{2-0}{5-0}=0{,}4$			
1	5	2		a_2 $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-1{,}5-0{,}4}{7-0}=-0{,}271$		
			$f[x_2,x_1]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{-1-2}{7-5}=-1{,}5$		a_3 $f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{0{,}167+0{,}271}{8-0}=0{,}0548$	
2	7	-1		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{-1+1{,}5}{8-5}=-0{,}167$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$ a_4 $=\frac{0{,}767-0{,}0548}{10-0}=0{,}0712$
			$f[x_3,x_2]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}=\frac{-2+1}{8-7}=-1$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{4-0.167}{10-5}=0{,}767$	
3	8	-2		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{11+1}{10-7}=4$		
			$f[x_4,x_3]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}=\frac{20+2}{10-8}=11$			
4	10	20				

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\
+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
+ a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)
\end{aligned}
$$

نعوّض: $a_0=0, a_1=0{,}4, a_2=-0{,}271, a_3=0{,}0548, a_4=0{,}0712$

$$p_4(x) = 0 + 0{,}4(x-0) - 0{,}271(x-0)(x-5) + 0{,}0548(x-0)(x-5)(x-7) + 0{,}0712(x-0)(x-5)(x-7)(x-8)$$
$$= 0{,}4x - 0{,}271x(x-5) + 0{,}0548x(x-5)(x-7) + 0{,}0712x(x-5)(x-7)(x-8)$$
$$= x[0{,}4 + (x-5)(-0{,}271) + (x-7)(0{,}0584 + (x-8)0{,}0712)]$$

- الخطأ الأعظمي المرتكب في طريقة نيوتن:

١) نفس قانون طريقة لاغرانج $E_{max} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)!}\left|f_{(\theta)}^{(n+1)}\right|$

2) قانون تايلور هو عبارة عن حد إضافي في الحدودية

$$E_{n+1} = a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

هذه الطريقة تتطلب نقطة إضافية (x_{n+1}, y_{n+1})

لإيجاد المشتق دون معرفة الدالة بطريقة حدودية الاستيفاء نيوتن

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!}\left|f_{(\theta)}^{(n+1)}\right| = a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

حيث $p_{n+1}=(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$

$f^{(n+1)} = a_{n+1}(n+1)!$ ((عن نقطة معينة))

ملاحظة: لا يطلب حساب الخطأ المرتكب إلّا إذا كان معطى بنصّ السّؤال الدّالة.

معلومة : ميّزة طريقة نيوتن، عند إضافة نقطة جديدة للجدول، هي أنّنا لا نحتاج لهدم ما بنيناه وإنما نضعها في آخر السطر أي بسطر جديد ونضيف عامود جديد

تمرين وظيفة:

أوجد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة التي تستوفي النقاط التالية :

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	3	6	10
$f(x_i)$	1	-6	4	169	921

وماذا تستنتج؟

وأحسب قيمة الدالة f عند $x = 5$

" انتهت المحاضرة "

Syria Math