المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : السادسة

التاريخ : ٩/١١/٢٠١٦

إعداد : محمد شهلا & خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

قام الأستاذ عبد الله المليح بإعطاء هذه المحاضرة بدلاً من الدكتور خليل يحيى حيث سنتناول في هذه المحاضرة ما تبقى من عوامل التكميل ، وسنتعرف على:

أ- عامل التكميل التابع لــ $x.y$.

ب- عامل التكميل التابع لــ $x+y$.

ت- عامل التكميل التابع لــ x^2+y^2 .

ث- عوامل التكميل لبعض المعادلات الشهيرة.

وقبل البدء سنقوم بحل تمرين واحد على الأفكار المطروحة في المحاضرة السابقة.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضليّة:

$$\boldsymbol{(x^2+y^2+x).dx+x.y.dy=0}$$

الحل: كالمعهود لدينا :

$$\begin{cases} M(x,y)=x^2+y^2+x & \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2y \\ N(x,y)=x.y & \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتالي المعادلة التفاضلية غير تامة ، لنوجد الفرق ولنقسمه على N:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y-y}{x.y}=\frac{y}{x.y}=\frac{1}{x}=\psi(x)$$

ومنه عامل التكميل تابع لــ x : $\mu=\mu(x)$ ، ونوجده عن طريق حل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\psi(x).dx=\frac{1}{x}.dx$$

بمكاملة الطرفين نجد:

$$ln|\mu|=ln|x|\Rightarrow \boxed{\mu=x}$$

نضرب طرفي المعادلة غير التامة بعامل التكميل μ (لتصبح تامة):

$$x(x^2+y^2+x).dx+x^2y.dy=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^3+xy^2+x^2)}_{M_1}.dx+\underbrace{x^2y}_{N_1}.dy=0$$

وهي من الشكل: $F(x,y)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M_1=x^3+xy^2+x^2 \dots (I)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N_1=x^2.y \dots (II)$$

الآن لنكامل طرفي (I) ، بالنسبة لـ x:

$$\boxed{F(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\varphi(y)} \dots (III)$$

والآن بعد مكاملتها بالنسبة لـ x نشتقها بالنسبة لـ y ، وذلك من أجل مطابقتها مع (II).

نشتق طرفي (III) بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)$$

حيث أنَّ: $\frac{\partial\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)}{\partial y}=0$ ، وبمطابقة المشتق مع N نجد:

$$x^2.y+\varphi'(y)=x^2y \Rightarrow \varphi'(y)=0 \Rightarrow \varphi(y)=c_1$$

وبالتالي أصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\Rightarrow F(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c_1=0$$

باعتبار: $C=-c_1$ يكون:

$$\boxed{F(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}=C}$$

وهو الحل العام المطلوب.

في بداية دراستنا لعوامل التكميل انطلقنا من المعادلات التفاضلية غير التامة من الشكل:

$$M(x,y).dx+N(x,y).dy=0$$

ولكونها غير تامة فإن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

بعد ذلك قمنا بفرض $\mu = \mu(x, y)$ عامل التكميل لها وقلنا بأنه عبارة عن دالة إذا ضربنا طرفي المعادلة غير التامة بها تصبح تامة:

$$(\mu. M). dx + (\mu. N). dy = 0$$

ولكونها أصبحت تامة (بعد ضربنا لحدودها بعامل التكميل) ، فيمكن كتابة:

$$\frac{\partial\big(\mu(x, y). M(x, y)\big)}{\partial y} = \frac{\partial\big(\mu(x, y). N(x, y)\big)}{\partial x}$$

هذا هو شرط التامة وحسب خاصة مشتق الجداء:

$$M. \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu. \frac{\partial M}{\partial y} = N. \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu. \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{N. \frac{\partial \mu}{\partial x} - M. \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)} \dots (1)$$

وعندها ميّزنا حالتين:

<u>الأولى:</u> عامل التكميل الذي يتبع لـــ x فقط: $\mu = \mu(x)$.

<u>الثانية:</u> عامل التكميل الذي يتبع لـــ y فقط: $\mu = \mu(y)$.

والآن سنتابع باقي حالات عوامل التكميل:

<u>الحالة الثالثة:</u>

عامل التكميل الذي يتبع لـــ $\boxed{Z = x. y}$: $\mu = \mu(Z) = \mu(x. y)$ ، ومنه:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dZ}. \frac{\partial Z}{\partial x} = y. \frac{d\mu}{dZ} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dZ}. \frac{\partial Z}{\partial y} = x. \frac{d\mu}{dZ}$$

نعوض مشتق μ بالنسبة لـــ x وبالنسبة لـــ y في (1):

$$N. y. \frac{d\mu}{dZ} - M. x. \frac{d\mu}{dZ} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dZ}(N. y - M. x) = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}(N. y - M. x) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dZ$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{y.N - x.M}}_{\psi(Z)}.dZ$$

وبالمكاملة نحصل على عامل التكميل $\mu(x.y)$ ، الذي بضربه بحدود المعادلة تصبح تامة.

الحالة الرابعة:

عامل التكميل الذي يتبع لـ $\boxed{Z = x + y}$: $\mu = \mu(Z) = \mu(x + y)$ ، ومنه:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dZ}.\frac{\partial Z}{\partial x} = 1.\frac{d\mu}{dZ} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dZ}.\frac{\partial Z}{\partial y} = 1.\frac{d\mu}{dZ}$$

نعوض مشتق μ بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y في (1):

$$N.\frac{d\mu}{dZ} - M.\frac{d\mu}{dZ} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dZ}(N - M) = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}(N - M) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dZ$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}}_{\psi(Z)}.dZ$$

وبالمكاملة نحصل على عامل التكميل $\mu(x + y)$ ، الذي بضربه بحدود المعادلة تصبح تامة.

الحالة الخامسة:

عامل التكميل الذي يتبع لـ $\boxed{Z = x^2 + y^2}$: $\mu = \mu(Z) = \mu(x^2 + y^2)$

وباتباع نفس ما سبق نحصل على:

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2x.N - 2y.M}}_{\psi(Z)}.dZ = \psi(Z).dZ$$

وبالمكاملة نحصل على عامل التكميل $\mu(x^2 + y^2)$ ، الذي بضربه بحدود المعادلة تصبح تامة ، وهكذا نكون قد أنهينا عوامل التكميل ☺

تلخيص لما سبق من حالات عوامل التكميل (بانوراما للإيضاح):

المعادلة التفاضلية غير التامة

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$$

الحالة (1)

نوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

نقسّمه على المقدار:

$$(-M)$$

إذا كان تابع لـــ y :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \psi(y)$$

عندئذٍ عامل التكميل

ينتج بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(y).dy$$

وإذا لم يكن تابع لـــ y

ننتقل للحالة (2).

الحالة (2)

نوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

نقسّمه على المقدار:

$$(N)$$

إذا كان تابع لـــ x :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$$

عندئذٍ عامل التكميل

ينتج بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(x).dx$$

وإذا لم يكن تابع لـــ x

ننتقل للحالة (3).

الحالة (3)

نوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

نقسّمه على المقدار:

$$(yN - xM)$$

إذا كان تابع لـــ

$: Z = x.y$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \psi(Z)$$

عندئذٍ عامل التكميل

ينتج بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(Z).dZ$$

وإذا لم يكن تابع لـــ:

$x.y$

ننتقل للحالة (4).

الحالة (4)

نوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

نقسّمه على المقدار:

$$(N - M)$$

إذا كان تابع لـــ

$: Z = x + y$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \psi(Z)$$

عندئذٍ عامل التكميل

ينتج بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(Z).dZ$$

وإذا لم يكن تابع لـــ :

$x + y$

ننتقل للحالة (5).

الحالة (5)

نوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

نقسّمه على المقدار:

$$(2xNN - 2yM)$$

إذا كان تابع لـــ

$: Z = x^2 + y^2$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN - 2yM} = \psi(Z)$$

عندئذٍ عامل التكميل

ينتج بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(Z).dZ$$

عوامل التكميل لبعض المعادلات التفاضلية الشهيرة:

1) المعادلة التفاضلية ذات المتحولات القابلة للفصل:

$$f_1(x).g_1(y).dx + f_2(x).g_2(y).dy = 0$$

وقد مرَّ معنا هذا الشكل في المعادلات التفاضلية التي ترد إلى منفصلة..

ويكون عامل التكميل لها:

$$\boxed{\mu = \mu(x,y) = \frac{1}{g_1(y).f_2(x)}}$$

ونلاحظ إذا ضربنا حدود المعادلة بعامل التكميل تصبح:

$$\underbrace{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}}_{M(x,y)}.dx + \underbrace{\frac{g_2(y)}{g_1(y)}}_{N(x,y)}.dy = 0$$

ويكون:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

لأن كلّاً من f_1, f_2 يتبع لـ x فقط ، وكل من g_1, g_2 يتبع لـ y فقط .

إذاً ومن تساوي المشتقات الجزئية فهي تامة .

2) المعادلة التفاضلية المتجانسة:

والتي لها الشكل:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$$

تقبل عامل تكميل لها من الشكل:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{x.M - y.N}} \quad : \quad xM - yN \neq 0$$

3) المعادلة المتجانسة التي لها الشكل:

$$y' + p(x)y = 0 \ ...(1)$$

تقبل عامل تكميل لها من الشكل:

$$\boxed{\mu = \mu(x,y) = e^{\int p(x).dx}}$$

وقد درسناه سابقاً ولنتذكر كيف حصلنا عليه من (1):

$$\frac{dy}{dx}+p(x).y=q(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}+p(x).y-q(x)=0$$

نضرب طرفي المعادلة بـــ dx:

$$\Rightarrow\underbrace{1}_{N(x,y)}.dy+\underbrace{[p(x).y-q(x)]}_{M(x,y)}.dx=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial y}=p(x)\\ \dfrac{dN}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{dN}{dx}\;;\;p(x)\neq 0$$

ومنه فالمعادلة غير تامة لأنّه في الحالة العامة: $p(x)\neq 0)$

لنوجد الفرق ولنقسّمه على N:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{dN}{dx}}{N}=\frac{p(x)}{1}=p(x)$$

عامل التكميل يتبع لـــ x ، ومنه فعامل التكميل ينتج بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu}=p(x).dx$$

ومنه بالمكاملة للطرفين نجد:

$$ln|\mu|=\int p(x).dx$$

باستخدام الدالة العكسية للدالة اللوغارتمية:

$$\boxed{\mu=e^{\int p(x).dx}}$$

وهو عامل التكميل المطلوب.

تمارين غير محلولة:

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $(y^2-x).dx+2y.dy=0$

2) $2y.dx + x.dy = 0$

3) $y.dx - (x + 6y^2).dy = 0$

4) $(2x^3 + y).dx - x.dy = 0$

5) $-y^3.dx + (xy^2 - x^2).dy = 0$

6) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y).dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x).dy = 0$

7) $(3x - y + 3).dy + y.dx = 0$

8) $(1 - x^2y).dx + x^2(y - x).dy = 0$

9) $(6xy + 3y^2x + x^3).dy + 3(x^2 + y^2).dx = 0$

10) $y.dx - x.dy = 0$

حل التمرين (2):

$$2y.dx + x.dy = 0$$

$$\begin{cases} M(x,y) = 2y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2 \\ N(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ليس تامة ، لنوجد الفرق ولنقسمه على N:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x}$$

نلاحظ أنّ عامل التكميل تابع لـــ x فقط ، ومنه فيمكن إيجاده بحل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{x}.dx \Rightarrow ln|\mu| = ln|x| \Rightarrow \mu = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة:

$$2y.x.dx + x^2.dy = 0$$

وهكذا ردّت إلى تامة ، ومن السهل جدّاً حلّها..

حل التمرين (6):

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y).dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x).dy = 0$$

$$\begin{cases} M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4.e^y + 6xy^2 + 1 \\ N(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4.e^y - 2xy^2 - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتالي فالمعادلة غير تامة ، لنوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3e^y + 2xy^4.e^y + 6xy^2 + 1 - 2xy^4.e^y + 2xy^2 + 3$$
$$= 8xy^3e^y + 8xy^2 + 4$$

لنقسمه على $-M$:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}$$

نخرج (4) من البسط عامل مشترك وكذلك (y) من المقام:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = -\frac{4}{y}$$

ومنه:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-4}{y}.dy \Rightarrow ln|\mu| = -4\,ln|y| \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^4}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة:

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right).dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right).dy = 0$$

$$2xe^y.dx + \frac{2x}{y}.dx + \frac{1}{y^3}.dx + x^2.e^y.dy - \frac{x^2}{y^2}.dy - \frac{3x}{y^4}.dy = 0$$

نلاحظ على أنَّ الحدود المتقابلة لهما نفس التكامل على اختلاف المتغير الذي نكامل من أجله أي أنَّ:

$$\int 2xe^y.dx = \int x^2.e^y.dy$$

وبالتالي:

$$\int (2xe^{y}.dx + x^2.e^{y}.dy) + \left(-\frac{x^2}{y^2}.dy + \frac{2x}{y}.dx\right) + \left(\frac{1}{y^3}.dx - \frac{3x}{y^4}.dy\right) = \int 0$$

وبالتالي الحل العام هو:

$$\boxed{2x^2e^{y} + \frac{2x^2}{y} + \frac{2x}{y^3} = C}$$

حل التمرين (8):

$$(1 - x^2y).dx + x^2(y - x).dy = 0$$

$$\begin{cases} M(x,y) = 1 - x^2y \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \\ N(x,y) = x^2(y - x) \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ليست تامة ، ولنوجد الفرق:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x^2 - 2xy = 2(x^2 - xy)$$

بمقارنته مع N يتبين بأننا سنخرج $-x$ عامل مشترك:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2x(x - y)$$

وبالتالي سنقسم على N :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-2x(y - x)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}$$

ومنه عامل التكميل يتبع لـــ x فقط ، فهو ينتج من حل المعادلة:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{x}.dx \;\Rightarrow\; ln|\mu| = -2\,ln|x| \;\Rightarrow\; \mu = \frac{1}{x^2}$$

نضرب بها طرفي المعادلة لتصبح تامة :

$$\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right).dx + (y - x).dy = 0$$

" انتهت المحاضرة "