جبر خطي ١

الدكتورة: شغف زوربا

المحاضرة : التاسعة

التاريخ : ١٠/١١/٢٠١٦

إعداد : منى + فاطمة

١

Subject: المحاضرة: الثالثة * المدرّس: مفى * فاطمة ٢٠١٦/١١/١٥

الخميس ١٨

المحاضرة «٤»

الفصل «2». المصفوفات والمحددات

تذكرة:

$A.B = C$, $C = C_{ij}$

$C_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} . b_{tj}$

$A \in M_{n\times k}$, $B \in M_{m\times n}$

$A.(B+C) = A.B + A.C$:

$\forall A \in M_{m\times n}(F)$

$B.C \in M_{n\times k}(F)$

$(A+B).C = A.C + B.C$:

$\forall A, B \in M_{n\times n}(F)$

$C \in M_{n\times k}(F)$

خصائص ضرب المصفوفات:

1) المصفوفة الواحدية I_n تشكل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات المربعة في المجموعة $M_n(F)$:

2) ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية ...

3) ضرب المصفوفات عملية تجميعية:

$(A.B).C = A.(B.C)$

4) عملية الضرب تقبل التوزيع على الجمع.

5)

$\lambda \in F$, $A \in M_{m\times n}(F)$

$B \in M_{n\times e}$

$\Rightarrow \lambda(A.B) = (\lambda.A).B = A(\lambda B)$

تعريف: مقلوب مصفوفة:

لتكن $A \in M_n(F)$ مصفوفة مربعة من المرتبة n معرفة على الحقل F ،

إذا وجدت مصفوفة $B \in M_n(F)$ بحيث: $A.B = B.A = I_n$

فإن B تسمى مقلوب «نظير» المصفوفة A بالنسبة لضرب المصفوفات ونرمز لها بـ A^{-1} ونقول

عن A أنها قابلة للقلب «منتظمة»،

AL SAMRAH

-١-

Subject : / /

ملاحظة: إذا لم توجد مثل المصفوفة B فإن A غير قابلة للقلب «شاذة»

تطبيق: إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{x-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & y^2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة: $x.y.Z$ ---

الحل: نعلم أن:

$$A.A^{-1}=I_n=I_3 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{x-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(x+1)(x-1)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4Z & 0 \\ 0 & 0 & 9y^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{3}=1 \Rightarrow$$

$$x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$$

$$\Rightarrow 4Z=1 \Rightarrow Z=1/4$$

$$\Rightarrow 9y^2=1 \Rightarrow y^2=1/9 \Rightarrow y=\mp 1/3$$

نتيجة: إذا كانت المصفوفة المربعة A تملك مقلوباً فإن هذا المقلوب وحيد ---

الإثبات: لنفرض أن $B.C$ كل منهما مقلوب المصفوفة A

عندئذٍ:

2

Subject :

$A.B = B.A = I_n,$

$A.C = C.A = I_n$

$C = C.I_n = C.(A.B) = \underbrace{(C.A).B}_{\text{تجميعي}}$

$I_n.B = B \qquad C = B$

وهو المطلوب

تعريف: لتكن $A=(a_{ij}) \in M_n(F)$ مصفوفة مربعة من المرتبة n معرفة على الحقل F

نعلم أن:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}.a_{ij}.\det(A_{ij})$$

$d_{ij} = (-1)^{i+j}.\det(A_{ij})$ العامل المرافق للعنصر a_{ij} ونسمي المصفوفة $D=(d_{ij})$ المصفوفة المرافقة لـ A « مصفوفة المعاملات الأكفرية لـ A »

ونسمي $D^t = (d_{ij})$ بالمصفوفة الملحقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز $adj(A)$

تمرين: أوجد المصفوفة المرافقة والمصفوفة الملحقة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: $D = (d_{ij})$

$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

العمود الأول:

$\to d_{11} = (-1)^2.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$d_{12} = -4, \quad d_{13} = +10,$

$\to d_{21} = (-1)^3.(-2) = 2$

$d_{22} = +0, \quad d_{23} = -1$

$\to d_{31} = +1, \quad d_{32} = +4, \quad d_{33} = -2$

$\Leftarrow$ المصفوفة المرافقة لـ A هي:

Subject :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 10 \\ 2 & 0 & -4 \\ +1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

أما المصفوفة الملحقة هي:

نقلب كل سطر الى عمود ⇐

$$adj = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 10 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: أهم خواص المصفوفة الملحقة نلخصها في ما يلي:

① - إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n ومعرفة على الحقل F فإن:

$$A.adj(A) = adj(A).A = det(A).I_n$$

نتيجة هامة: إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن

A قابلة للقلب $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

② نستنتج أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} . adj(A)$$

وللتأكد ⇐

$$A.A^{-1} = A . \frac{1}{det(A)} . adj(A)$$

$$= \frac{1}{det(A)} . \underbrace{A.adj(A)}$$

$$= \frac{1}{det(A)} . \underbrace{det(A).I_n}$$

$$= I_n$$

$$A^{-1}.A = I_n$$

تطبيقات: أوجد مقلوب المصفوفة التالية إن وجد:

①
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$det(A) = 2 \neq 0 \Leftarrow A$ قابلة للقلب

ومقلوبها

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الملحقة لـ A: نبدل عناصر قطر رئيسي ونغير إشارة عناصر القطر الثانوي

$$D^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

3

Subject : / /

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

"تعميم"

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; \; ad - bc \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

المصفوفة الملحقة لمصفوفة مربعة من الدرجة الثانية تنتج بتبديل عناصر القطر الرئيسي وتغيير إشارة عناصر القطر الثانوي --

(2) مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

⇐ متناسبان

تذكرة: إذا وجد صفان متناسبين ⇐ قيمة المحدد تساوي الصفر ---

$$\det(B) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 + 2(1) = -2 + 2 = 0$$

المصفوفة B ليست قابلة للقلب "شاذة" ....

(3)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = 2(-1) - 0 + 1(10) = 8 \neq 0$$

⇐ C قابلة للقلب ---

ومقلوبها هو:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot adj(C)$$

المصفوفة المرافقة $D = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 10 \\ +2 & 0 & -4 \\ +1 & +4 & -2 \end{bmatrix}$

$$d_{13} = (-1)^4 \cdot (0+1) = 1$$

$$adj(C) = D^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 10 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

ويكون:

$$C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 10 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/8 & -1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -10/8 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

★ انتهت المحاضرة ★