تحليل ١

الدكتور: نايف طلي

المحاضرة : السادسة

التاريخ : ٣٠/١٠/٢٠١٦

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة السادسة ٣٠ / ١٠ / ٢٠١٦م

قبل البدء بالمحاضرة سوف نقوم بحل تمارين تقارب المتتاليات ...

التمرين الأول:

أثبت أن المتتالية $\left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}_{n\in N}$ متقاربة من (+2) بلغة الـ (ε)

الحل ..

لكي تكون المتتالية متقاربة من (+2) يجب تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0 ; \exists N_\varepsilon \in N : n > N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

نلاحظ أنه..

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right| = \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{n}$$

فإنه للبحث عن قيم n التي تحقق المتتالية $\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ يكفي حل المتتالية $\frac{3}{n}<\varepsilon$

من أجل ذلك نلاحظ أن المتتالية الأخيرة تكافئ المتتالية (المتراجحة) $n>\frac{3}{\varepsilon}$

ولنختار $N_\varepsilon \geq \frac{3}{\varepsilon}$

للتأكد من صحة اختيار N_ε نعوض في التعريف كما يلي:

$$\forall\varepsilon>0 ; \exists N_\varepsilon > \frac{3}{\varepsilon} ; \forall n > N_\varepsilon \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right| = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{n} < \frac{3}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

التمرين الثاني:

أن المتتالية $\left\{\frac{2(n-1)}{n^3+1}\right\}_{n\in N}$ متقاربة من الـ (0) بلغة ε ..

الحل ..

لكي تكون المتتالية متقاربة من الصفر يجب تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0; \exists N_\varepsilon\in N : n>N_\varepsilon \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{2(n-1)}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$$

نلاحظ أنه..

$$\left|\frac{2(n-1)}{n^3+1}-0\right| = \left|\frac{2n-2}{n^3+1}\right| \leq \left|\frac{2n}{n^3+1}\right| \leq \left|\frac{2n}{n^3}\right|$$

$$= \frac{2}{n^3} = \frac{2}{n^3} \leq \frac{2}{n}$$

فإنه للبحث عن قيم n التي تحقق المتتالية $\left|\frac{2(n-1)}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$ يكفي حل المتتالية $\frac{2}{n}<\varepsilon$

من أجل ذلك نلاحظ أن المتتالية الأخيرة تكافئ المتتالية $n>\frac{2}{\varepsilon}$ ولنختار $N_\varepsilon\geq\frac{2}{\varepsilon}$

للتأكد من صحة اختيار N_ε نعوض في التعريف كالتالي:

$$\forall\varepsilon>0; \exists N_\varepsilon>\frac{2}{\varepsilon}; \forall n>N_\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{2(n-1)}{n^3+1}-0\right| = \left|\frac{2(n-1)}{n^3+1}\right| \leq \left|\frac{2n}{n^3+1}\right|$$

$$\leq \frac{2n}{n^3} \leq \left|\frac{2}{n^3}\right| = \frac{2}{n^3} \leq \frac{2}{n} < \frac{2}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

التمرين الثالث..

اثبت أن المتتالية $\left\{\frac{1}{n^3+1}\right\}_{n\in N}$ متقاربة من (0) بلغة الـ ε ..

الحل ..

لكي تكون المتتالية متقاربة من الصفر يجب تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0; \exists N_\varepsilon\in N : n>N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$$

نلاحظ أنه..

$$\left|\frac{1}{n^3+1}-0\right| = \left|\frac{1}{n^3+1}\right| = \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$$

ننتقل للبحث عن القيم n التي تحقق المتراجحة $\left|\frac{1}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$ يكفي حل المتراجحة $\frac{1}{n^3}<\varepsilon$

بعد ذلك نلاحظ أن المتراجحة الأخيرة تكافئ المتراجحة (المتراجحة) $n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$

ونختار $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ لا بأس من حيث الاختيار N_ε

نعوض في التعريف كما يلي:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} : n > N_\varepsilon \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{1}{n^3+1}-0\right| = \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

مبرهنات عامة عن النهايات:

1] $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & : |a|<1 \\ 1 & : a=1 \\ \text{غير موجودة} & : a=-1 \\ \text{غير موجودة} & : |a|>1 \end{cases}$

ولكن حالة $|a|=1$: غير موجودة هنا لا توجد نهاية وحيدة للمتتالية في متابعة حيث لا نهاية لها:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases} \quad : |a|=1$$

2] $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad : a>0$

3] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

4] $\lim\limits_{n\to\infty} n a^n = 0 \quad : |a|<1$

5] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

إثبات النظريات:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0 \quad ; |a|<1$

البرهان: أي يجب إثبات ما يلي:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Longrightarrow$$

$$|a^n - 0| < \varepsilon$$

بما أنه $|a|<1$ عندئذ لنفرض أن:

$$|a| = \frac{1}{1+\alpha} \quad : \alpha > 0$$

- ولكن كيف حصلنا على هذا المقدار ؟؟

إذا أخذنا:

$$1+\alpha > 1 \quad : \alpha > 0$$

إذا قسمنا الطرفين على $(1+\alpha)$:

$$1 > \frac{1}{1+\alpha}$$

الآن هذا المقدار يمكن التعبير عنه بالقيمة المطلقة:

$$\boxed{|a| = \frac{1}{1+\alpha} \quad : \alpha > 0}$$

ونستعين بالاستعانة بثنائي حد نيوتن بأنه:

$$(1+\alpha)^n = 1 + \alpha n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \dots$$

ويمكننا القول:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

والآن نريد أن نحصل على N_ε فنأخذ وحسب خواص القيمة المطلقة:

$$|a^n - 0| = |a^n| = |a|^n = \left|\frac{1}{1+\alpha}\right|^n$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha} < \frac{1}{n\alpha}$$

نجعل $\frac{1}{\alpha n} < \varepsilon \Longleftarrow n > \frac{1}{\alpha \varepsilon}$

نكمل...

نختار $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon}$

لنتأكد من صحة اختيار N_ε نعوض في التعريف:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N_\varepsilon \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} ; \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$$

$$|a^n - 0| = |a^n| = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{\alpha n} < \frac{1}{\alpha N_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

و.هـ.م.

* يوجد طريقة أخرى للبرهان:

إذا أخذنا

$$|a^n| < \varepsilon$$

وأخذنا لوغاريتم للطرفين:

$$n \ln|a| < \ln \varepsilon$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|}$$

نختار $N_\varepsilon \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|}$ ونتأكد من صحة الاختيار

بالتعويض في التعريف ...

إنه صحيح، ولكن ذكرنا الطريقة ليتعلم الطالب طريقة التفكير بغير الأمور..

وبالنسبة للثانية:

$$\lim_{n \to \infty} a^n \text{ غير موجودة } : |a| > 1$$

$$|a| > 1$$

$$|a| = 1 + \alpha \quad ; \alpha > 0$$

$$|a|^n = (1+\alpha)^n > 1 + \alpha_n > \alpha n$$

بناءً على قاعدة أرخميدس فإنه:

$$\alpha n > m$$

إذاً:

$$\forall m \in \mathbb{R} . \exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha n > m$$

ومنه: المتتالية $\{a^n\}$ غير محدودة عندما $|a| > 1$

وبالتالي $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ غير متقاربة

⟸ ملاحظة: نلاحظ أنه إذا كانت المتتالية متقاربة فإنها محدودة وإذا كانت المتتالية غير محدودة فإنها غير متقاربة..

2] $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$

البرهان..

توضيح فكرة البرهان:

من ملاحظة الطريقة أنه إذا فرضنا المتتالية التالي:

$a_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ وهدفنا أن نثبت $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

يكافئ برهان

$$\lim_{n \to \infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) = a^n$$

وهذه الفكرة لطريقة الإثبات، ولإثبات الإثبات تكون $\{a_n\}$ متقاربة من الصفر حسب الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$$

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

ولكن هل a_n قيم موجبة فلا من عناصر:

$$\{0, \sqrt{2} - 1, \sqrt[3]{3} - 1, \sqrt[4]{4} - 1, \dots\}$$

بالتالي جميع الأعداد الصحيحة ثابت لأنه هي دائماً أكبر من الصفر والبرهان سهل..

إذاً: $a_n \geq 0$ من حيث المبدأ..

والبرهان:

$$a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$$

نرفع الطرفين $(\;)^n$

$$(1 + a_n)^n = n$$

وبالتالي حسب ثنائي حد نيوتن:

$$n=(1+a_n)^n = 1 + a_n n = \frac{n(n-1)}{2!}(a_n^2)+\dots$$

إذا أخذنا الحد: $\frac{n(n-1)}{2!}(a_n)^2$

عندها أصغر من n:

$$n > \frac{n(n-1)}{2!}(a_n)^2$$

نقسم على n:

$$1 > \frac{n-1}{2}(a_n)^n \xRightarrow{n\neq 1} \frac{2}{n-1} > (a_n)^2$$

إذاً هنا $n>1$

وهذه النتيجة تفيدنا أنه لدينا $|a_n - 0|$ بالقيمة المطلقة ونريد أن نوجد N_ε وهذه طريقة للتعامل لنعود إلى التعريف:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي هو متقارب من الـ (0) عندما $n\to\infty$

ولنوجد N_ε بجعل $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon^2} < n-1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\varepsilon^2}+1 < n$$

نختار $N_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon^2}+1$ وللتأكد من صحة نعوض في التعريف:

$$\forall \varepsilon>0 ; \exists N_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon^2}+1 ; \forall n \geq N_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \varepsilon$$

والاستنتاج:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

نستطيع القول أن لـ a حسب قاعدة أرخميدس ولكن أي عدد فيمكننا بكل سهولة توضيح:

$$\frac{1}{n} < a < n \quad ; \quad a>0$$

وطالما هذه العبارة صحيحة فنأخذ الجذر النوني الحدود:

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} < a^{\frac{1}{n}} < n^{\frac{1}{n}}$$

ونأخذ النهايات لجميع الحدود...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \leq \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

تذكرة بأنه عامة:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

بحيث أن تكون النهايتين نفس النتيجة:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$a \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad ; a>0$

البرهان..

نلاحظ أنه إذا كان $a>0$ فإنه يوجد $k\in N$

بحيث $a<k$ ومنه لنفرض أن $\varphi = \frac{a}{k}$

فيكون أن $0<\varphi<1$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\dots\cdot\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n}$$

نلاحظ أيضاً أن...

$$\frac{a}{k} < \varphi , \frac{a}{k+1} < \varphi , \dots , \frac{a}{n} < \varphi$$

وعليه يكون:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n} < \underbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}}_{\text{مرة } k}\cdot\underbrace{\varphi\cdots\varphi}_{\text{مرة } n-k} = \frac{a^k}{k!}\cdot\varphi^{n-k}$$

والآن بالاستفادة من النظرية الشهيرة:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

حيث $0<a<1$ نجد أن:

$$0 \le \frac{a^n}{n!} \le \frac{a^k}{k!}\cdot\varphi^{n-k}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} 0}_{=0} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{a^k}{k!}\cdot\varphi^{n-k}}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

انتهت المحاضرة....

لا تنسونا من صالح دعواتكم :)

إعداد: رهف + رسيكة + شيراز