# الخوارزميات

الخوارزمية:

هي عبارة عن مجموعة من الخطوات المتتالية والبسيطة والمنتهية التي تؤدي إلى حل مشكلة ما

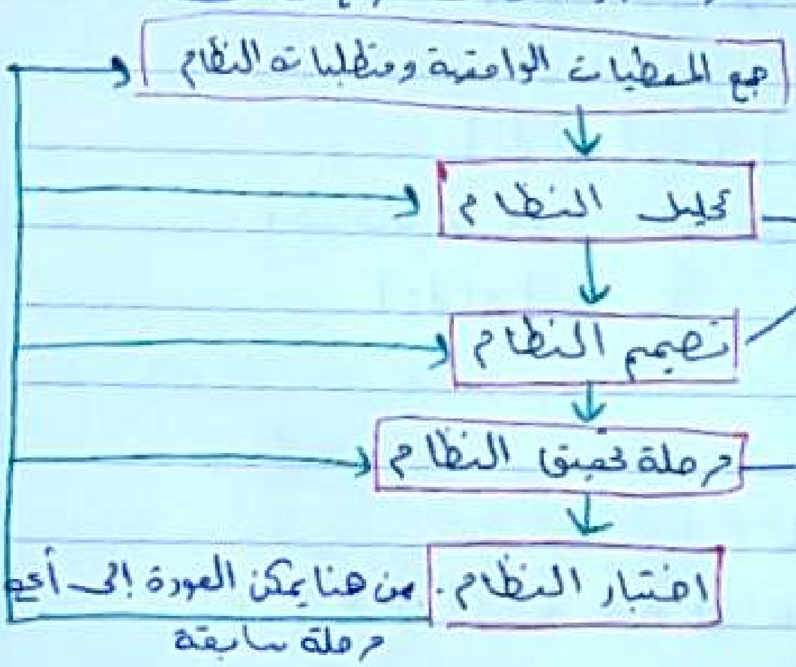
- نقول عن خوارزمية إنها صحيحة إذا انهت التنفيذ وأعطت خرج صحيح.
- " " " " خاطئة إذا لم تنته ، أو أعطت خرج خاطئ.

* كلفة الخوارزمية: عدد العمليات التي تقوم بإنجازها (حسابية، مقارنة، اسناد ....)

خوارزميات

* كلفة الخوارزمية من ناحية الذاكرة: وهي عدد الأماكن التي تحجزها بالذاكرة.

برمجة الخوارزميات




مثال:

```
i = 0 ;
while( i < n  && L[i] != x)
        i = i+1 ;
  if (i >= n)     i = -1 ;
```

مقطع برمجي وهو غير واضح وليكون واضح المثال التالي:

- بفرض أن L مصفوفة أعداد صحيحة بعدها n ، الخوارزمية السابقة تقوم بالبحث عن العنصر x في L إذا كان موجود ، وتعيد 1- إذا لم يكن موجود.

تمثل البرنامج نكتب : هذه الدالة تقوم بـ ..... وترجع ..... //

دالة

```
int search (int L[ ]; int x) {    int i=0
while ((i<L.length && L[i] != x)        i = i+1 ;
if (i >= L.length)
   return -1;
   else   return i ;  }
```

- دائماً سوف نعبر عن كلفة الخوارزمية بتابع بدلالة حجم المعطيات ونرمز له $T(n)$

- تعاريف «عن التعقيد الزمني للخوارزمية»:

1- التعقيد الزمني في أحسن حال / أقصر زمن //

or; $min_A = min \{ cost_A(d_i) : \forall d_i \in D_n \}$

2- التعقيد الزمني في أسوء حال:

$Max_A = max \{ cost_A(d_i) : \forall d_i \in D_n \}$

3- التعقيد الزمني الوسطي:

$$Avg_A = \sum_{d_i \in D_n} p(d_i) . Cost_A(d_i)$$

وفي حال تساوي احتمالات:

$$Avg_A = \frac{1}{|D_n|} . \sum_{d_i} Cost_A(d_i)$$

// هامش: نفرض n حجم المعطيات للمسألة، نرمز ب $Cost_A(d)$ (كلفة خوارزمية) لكلفة الخوارزمية A من أجل المعطاة d. ونرمز ب $D_n$ لمجموعة جميع المعطيات الممكنة للخوارزمية //

مثال:

خوارزمية A.

```
j = 1 .
while ( j <= n and L[j] ≠ x ) ;
    j = j + 1 ;
if ( j > n )
    j = 0 ;
```

عملية الأساسية

// هامش: يهمنا فيها عمليات المقارنة الفعلية (المثل عنصر فانة) // L[j] ≠ x

1) ما هو التعقيد في أحسن الحالات؟

// يفرض ان العنصر بأول خانة // $min_A = 1$ { تساوي 1 ،1 ،5 ، 10 المهم تساوي ثابتة }

// شرح: الخوارزمية فيها أكثر من عملية وكل عملية ستكون 1 ~~[illegible]~~ والذي فعلاً ان الخوارزمية تبحث عن x وإذا كان x هو أول خانة فهو أقصر زمن //

2) ما هو التعقيد في أسوء حالة؟

$Max_A = n$ { قارن x مع كل العمليات ولم يجده }

// شرح: لو فرضنا انه تم تنفيذ الخوارزمية ووجد العنصر x في الخانة i فإن
// $cost_A = i$

3) ما هو التعقيد الوسطي؟

/ /

- بفرض $D_{n,0}$ هي مجموعة المتجهات التي لا يظهر فيها العنصر $x$ أو عددها $n$ //
- " $D_{n,i}$ " " " " يظهر " " " // " //

حيث $D_{n,i} \cup D_{n,0} = D_n$

- وبفرض أن $q$ هو احتمال وجود العنصر $x$ في متجهة ما، وأن $1-q$ هو احتمال عدم وجود $x$.

إذاً:

$$avg_A = \sum_{d_i} p(d_i)\, cost_A(d_i)$$

نقسم إلى قسمين بكون عناصر صدوقين

$$= \sum_{d_i \in D_{n,0}} p(d_i) \cdot cost_A(d_i) + \sum_{d_i \in D_{n,i}} p(d_i)\, cost_A(d_i)$$

I يحوي $x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1-q}{n} \cdot n + \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{n} \times i$$

II لا يحوي $x$

$$= (1-q)n + \frac{q}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{n(n+1)}{2}} = (1-q)n + \frac{q}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

وبفرض من ...
احتمال وجود $x$ في الصورتين

$$= (1-q)n + \frac{q}{2}(n+1) = n - nq + \frac{qn}{2} + \frac{q}{2}$$

I: $\frac{1-q}{n}$
و II: $\frac{q}{n}$

$$= \frac{2n - 2nq + qn + q}{2} = \frac{2n - qn + q}{2}$$

$$\Rightarrow avg_A = \frac{2n - qn + q}{2}$$

بفرض $q = 1$ يعني متجهة تحوي $x$

$$Avg_A = \frac{n+1}{2}$$

بفرض $q = 0$ يعني متجه لا تحوي $x$

$$Avg_A = n$$

مثلاً: لو كان لدينا

مثلاً $i <= 7$ تعليمة $c = j >= 5$

شرط، تعليمة، تعليمة

if (C) then A else B

بفرض أن $p_x$ هو عدد العمليات التي تقوم بها التعليمة $x$

$$\Rightarrow p(C) + Max\{p(A), p(B)\}$$

// عمليات (C) بعدين العملية الأكبر A أو B //

// وهي من المسائل الترتيب الشهيرة لعملية ترتيب عناصر مصفوفة //

مثال:

for i=1 to n-1 do   n مرة (n-1)

for j=i+1 to n do   مرة (n-1)

if (A[i] > A[j]) {   مرة ($n^2$)

عملية تبديل SWAP { tmp = A[i]   كل ما تتحقق الشرط

A[i] = A[j]   ينفذ $n^2$ مرة

A[j] = tmp

}

احسب كلفة الخوارزمية A التي حجمها n ،

// كم عملية مقارنة وكم عملية تبديل //

$n^2$ عملية مقارنة و $n^2$ عملية تبديل $\Leftarrow$ $T(n) = 2n^2$

وهي في أسوء الأحوال

في أحسن الأحوال نفس الشيء: هي $n^2$

- تعريف: نقول عن التابع $f(n)$ أنه مُسيطر عليه من التابع $g(n)$ ونرمز بذلك

$$f(n) = O(g(n)) \quad ; \quad f = O(g)$$

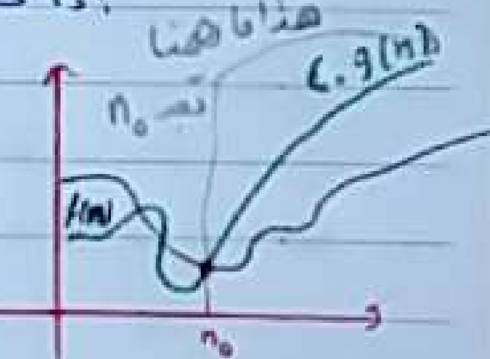
إذا تحقق: $\exists\, c$ ثابت $, \forall n > n_0 :$

$$|f(n)| \leq c|g(n)|$$

فالمهم // التوابع ليس لها علاقة بالتعقيد //

الخط البياني لـ

// يعني بيانياً رسم $c.g(n)$ بعد النقطة $n_0$ لازم يكون أعلى من رسمة الخط البياني لـ $f(n)$ ولا يهمنا قبل هذه النقطة //




تمرين: ليكن $f(x)$ كثير حدود من الدرجة $m$ ، أثبت أن $f(x) = O(x^m)$

حيث $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$

الحل:
$$|f(x)| = |a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0| \leq$$
$$\leq |a_m x^m| + |a_{m-1} x^{m-1}| + \cdots + |a_1 x| + |a_0|$$
$$\leq |a_m| x^m + \cdots + |a_1| x + |a_0| \qquad \div x^m$$
$$\frac{|f(x)|}{x^m} \leq |a_m| + \frac{|a_{m-1}|}{x} + \cdots + \frac{|a_1|}{x^{m-1}} + \frac{|a_0|}{x^m}$$

نحذف المقامات

المحاضرة العاشرة.

اعداد موجبة

$$\frac{|f(x)|}{x^m} \leq \overbrace{|a_m| + \dots + |a_1| + |a_0|}^{c>0}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)|}{x^m} \leq c \Rightarrow |f(x)| \leq c \cdot x^m$$

$$\Leftarrow \quad \# \; f(x) = O(x^m)$$

كيف نستفيد منها $T(n) = 2n^2 = O(n^2)$ // مثال سابق

لو كانت $T(n) = 1000\,n^3 + 60\,n$

$$\Rightarrow T(n) = \underset{c \cdot g(n)}{O(n^3)}$$

انتهت ـــــ المحاضرة ٩