نظرية الاحتمالات

محاضرة 15 / /

تمرين: ليكن Y متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالي:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{1+y} & ; \quad y > 0 \\ 0 & ; \quad y \leq 0 \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y وتحقق من ذلك ثم عين C من أجل $P[Y \leq C] = \frac{1}{2}$

الحل:

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

$$= \frac{(1+y)-(y)}{(1+y)^2} = \frac{1}{(1+y)^2}$$

إذن:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2} & ; \quad y > 0 \\ 0 & ; \quad y \leq 0 \end{cases}$$

للتحقق: لدينا:

① $f_Y(y) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy \overset{?}{=} 1$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)^2} = \left[\frac{-1}{1+y}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

من أجل c:

$$P(Y \leq c) = F_Y(c) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

أي أن: $P(Y \leq 1) = \frac{1}{2}$

تمرين: لتكن Y متغير أ عشوائياً له الكثافة

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{(y-2)^2}{9} & ; \; y = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل $f_Y(y)$ كثافة احتمالية فعلية لـ Y ؟

الحل: لنتحقق من شروط دالة الاحتمال:

① $f_Y(y) \geq 0$ محقق.

② $\sum_y f_Y(y) \overset{?}{=} 1$

$$\sum_y f_Y(y) = \sum_{y=0}^{5} \frac{(y-2)^2}{9}$$

$$= \frac{(-2)^2}{9} + \frac{(-1)^2}{9} + 0 + \frac{(1)^2}{9} + \frac{(2)^2}{9} + \frac{(3)^2}{9} = \boxed{\frac{19}{9} \neq 1}$$

إذن $f_Y(y)$ ليست كثافة احتمالية فعلية لـ Y

تمرين: لتكن Y متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_Y(y) = \begin{cases} k y^2 & ; \; y \in [0,3] \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

① عين k لتكون f_Y كثافة فعلية لـ Y

② عين دالة التوزيع الاحتمالية لـ Y ثم احسب $P(1<Y<2)$

الحل: الشرط الأول: $f_Y(y) \geq 0$ محقق من أجل $\boxed{K > 0}$

الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$$

$$= \int_{0}^{3} k y^2\,dy = 1$$

$$= k\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= 9k = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{9}}$$

فتصبح دالة الكثافة لـ Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}y^2 & ; y \in [0,3] \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

* $y < 0 \Leftarrow$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} (0)\,dt = \boxed{0}$$

* $0 \leq y \leq 3 \Leftarrow$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{y} \frac{t^2}{9}\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^y = \boxed{\frac{y^3}{27}}$$

* $3 < y$:

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{3} \frac{t^2}{9}\,dt + \int_{3}^{y} (0)\,dt$$

$$= 0 + 1 + 0 = \boxed{1}$$

فتصبح دالة التوزيع لـ Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y \leq 0 \\ \frac{y^3}{27} & ; 0 \leq y \leq 3 \\ 1 & ; 3 \leq y \end{cases}$$

$$P(1 < Y \leq 2) = F(2) - F(1)$$

$$= \frac{(2)^3}{27} - \frac{(1)^3}{27} = \frac{7}{27}$$

تمرين: ليكن Y متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y وتحقق من ذلك وعين $P[Y > 10]$

الحل:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = e^{-y}$$

فتصبح دالة الكثافة بالشكل:

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \\ & y \leq 0 \end{cases}$$

للتحقق لدينا:

① $f_Y(y) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy \overset{?}{=} 1$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} = \left[-e^{-y} \right]_0^{+\infty} = (0) - (-1) = 1$$

$$P[Y > 10] = 1 - P[Y \leq 10]$$
$$= 1 - F(10)$$
$$= 1 - (1 - e^{-10}) = e^{-10}$$

تمرين: إذا علمت أن الطلب اليومي على مادة معينة من مخزن يمثل متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$y_7 <$
Y	0	1	2	3	4	5	6	$6<$
$f_Y(y)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05	0

والمطلوب:

① برهن أن $f_Y(y)$ دالة كثافة منالية لـ Y

الحل: يجب تحقق الشرطين:

① $f_Y(y) \geq 0$

② $\sum_y f_Y(y) \overset{?}{=} 1$

$$= (0,1) + (0,15) + (0,2) + (0,25) + (0,15)$$
$$+ (0,1) + (0,05) + 0 = 1$$

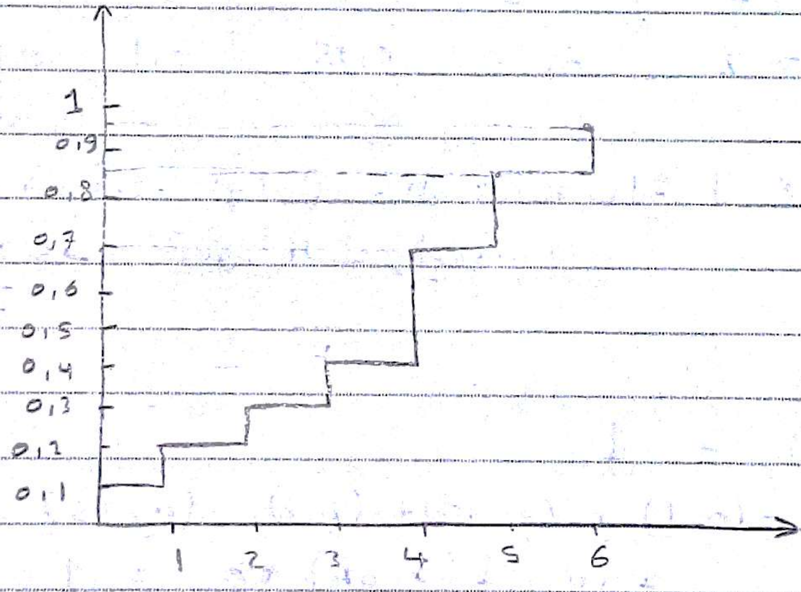
② عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ Y.

الحل:

$$F_Y(y) = \sum_{y_i \leq y} f_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < y_1 \\ f_Y(y_1) & ; y_1 \leq y < y_2 \\ f_Y(y_1) + f_Y(y_2) & ; y_2 \leq y < y_3 \\ \vdots & \\ 1 & ; y_n \leq y \end{cases}$$

إذن :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ 0,1 & ; 0 \le y < 1 \\ 0,1+0,15 = 0,25 & ; 1 \le y < 2 \\ 0,1 + 0,15 + 0,2 = 0,45 & ; 2 \le y < 3 \\ 0,70 & ; 3 \le y < 4 \\ 0,85 & ; 4 \le y < 5 \\ 0,95 & ; 5 \le y < 6 \\ 1 & ; 6 \le y \end{cases}$$



③ احسب $P(Y < 2)$, $P(Y \ge 4)$

الحل:

$$P(Y \ge 4) = 1 - P(Y < 4)$$

$$= 1 - [\, P(Y \le 4) - \underbrace{P(Y = 4)}_{f_Y(4)} \,]$$

$$= 1 - [\, \overset{F(4)}{0,85} - \overset{f(4)}{0,15} \,]$$

$$= 1 - 0,70 = 0,30$$

$P(Y<2) = P(Y \leq 2) - P(Y=2)$

$= F(2) - f(2)$

$= 0{,}45 - 0{,}2 = 0{,}25$

« الفصل الرابع »

المتجهات العشوائية:

ـ الأشعة العشوائية الثنائية وتوزيعاتها الاحتمالية.

تعريف: إذا كان المتغيران X و Y معرفين على (Ω, F, P) فإننا نسمي الشعاع (المتجه) (X, Y) شعاعاً عشوائياً. معرفاً على (Ω, F, P)

أي أنه يمكن أن نلحق بكل حدث ابتدائي $\omega \in \Omega$ متجة (x, y) من R^2 لهذا الشعاع

$$\boxed{(X, Y)\omega = (X(\omega), Y(\omega)) = (x, y)}$$

تعريف: نسمي الدالة $F_{X,Y}(x, y)$ المعرفة بالشكل:

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للشعاع (للمتجه) X, Y

ـ إن وقوع الحدث $[X \leq x, Y \leq y]$ يعني وقوع الحدثين $[X \leq x]$ و $[Y \leq y]$ معاً بآن واحد أي أن:

$$P[X \leq x, Y \leq y] = P([X \leq x] \cap [Y \leq y])$$

خواص دالة التوزيع المشتركة:

① $F(x,y)$ دالة غير متناقصة بالنسبة لكل من x و y

② $F(-\infty, y) = 0 \quad ; \quad F(x, -\infty) = 0$

③ $F(+\infty, +\infty) = 1$

④ $F(x, +\infty) = F_X(x)$

$F(+\infty, y) = F_Y(y)$

حيث $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ دالتا التوزيع الاحتمالي لـ X و Y على الترتيب وتدعيان دالتا التوزيع الهامشيتان لـ X و Y على الترتيب

⑤ $P(x_1 < X < x_2 \,;\, y_1 < Y < y_2)$

$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$

انتهت المحاضرة العاشرة