التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : السابعة

التاريخ : ٢/١١/٢٠١٦

دراسة التقارب المنتظم لمتسلسلات التوابع

تعريف : لتكن لدينا متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I و متقاربة نقطياً من تابع المجموع $s(x)$ على I ((و هو تحديداً $\lim_{n\to} s_n(x) = s(x)$)) فإننا نعرف الباقي النوني لهذه المتسلسلة بالشكل :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = s(x) - s_n(x)$$

تعريف : تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المتقاربة نقطياً من تابع المجموع $s(x)$ على I متقاربة **بانتظام** على I إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث $|r_n(x)| < \varepsilon$ عندما $n > N_0$ لكل $x \in I$

مبرهنة(١): الشرط اللازم لتقارب متسلسلة توابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ من التابع $f(x)$ على المجال I بانتظام هو أن يسعى حدها العام إلى التابع الصفري بشكل منتظم على I

ويمكن صياغة نص المبرهنة وفق الآتي:

إذا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I من التابع $f(x)$ فإن الحد العام لهذه المتسلسلة يتقارب من التابع الصفري بانتظام على I

الإثبات: لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I أي متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة بانتظام على I ومنه و حسب كوشي يكون:

أياً كان $0 < \varepsilon$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ لأجل $n > m > (N_0 + 1) > N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

و لنأخذ $m = n - 1$ عندئذٍ يصبح لدينا :

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |s_n(x) - s_{n-1}(x)| = |f_n(x)| < \varepsilon$$

أي يكون $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ عندما $n > N_0$

مما يعني $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$

((طبعاً من البداية لدينا $N_0 = N_0(\varepsilon)$ كون متتالية التوابع الجزئية متقاربة بانتظام))

ملاحظة: إذا كان الحد العام للمتسلسلة لا يسعى للصفر فتكون عندها المتسلسلة متباعدة.

نتيجة(١):

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I فهي متقاربة بانتظام على أي مجال جزئي من I

نتيجة(٢):

إذا كان الحد العام للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري بشكل منتظم والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة فليس من الضروري أن تكون المتسلسلة متقاربة **بانتظام** على I

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

هل المتسلسلة متقاربة بانتظام على $I =]-1,1[$؟

الحل:

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - k^{k+1}$$

$$= x - x^2 + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots + (x^n - x^{n+1})$$

بالاختصار نجد:

$$s_n(x) = x - x^{n+1}$$

نأخذ النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x - x^{n+1}) = x \quad ; \quad x \in]-1,1[$$

فالمتسلسلة متقاربة من $s(x)$ على I

كما أن الحد العام للمتسلسلة يسعى للتابع الصفري.

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0 = f(x)$$

لننظر في هذا تقارب الحد العام من التابع الصفري فيما إذا كان منتظماً:

نأخذ نهاية الـ sup لفرق $f_n(x)$ عن $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup|x^n(1-x)-0|$$

➢شرح بسيط: عندما الـ x تنتمي للمجال، أكبر قيمة للـ sup هي الواحد وهو نهاية $\frac{n}{n+1}$ عندما n تسعى للانهاية وبالتالي $\frac{n}{n+1}$ هي الأنسب لكي نختاره وهذا المقدار دائماً يبقى أصغر من الواحد بينما لو أخذنا $\frac{n+1}{n}$ فهذا المقدار أكبر من الواحد وبالتالي لا يمكن أخذه.

أي: $]-1,1[\ni \frac{n}{n+1}$ وهي أكبر قيمة نهايتها تسعى للواحد.

بالتعويض بدل كل $\sup x$ بـ $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup|x^n(1-x)| = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{e}(1-1) = 0$$

وبالتالي تقارب الحد العام هو تقارب منتظم للتابع الصفري على $]-1,1[$

و الآن لنبرهن أن المتسلسلة متقاربة لكن ليس بانتظام

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists N > (\frac{\ln\varepsilon}{\ln x} - 1) \ :n > N$$

$$|s_n(x) - s(x)| = |x - x^{n+1} - x| = |x|^{n+1} < \varepsilon$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln|x|^{n+1} < \ln\varepsilon$$

$$(n+1)\ln|x| < \ln\varepsilon$$

نقسم على $\ln|x|$ ولأنه مقدار سالب نقلب إشارة المتراجحة: $(-1 < x < 1)$

$$(n+1) > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} - 1$$

ومنه $N(\varepsilon,x) > \max(1,\frac{ln\varepsilon}{\ln|x|} - 1)$ أي N تابع لـ ε و x وشرط التقارب المنتظم أن يكون N تابع لـ ε

فقط وبالتالي فالتقارب غير منتظم.

نتيجة(٣):

إذا كان الحد العام للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري بشكل غير منتظم والمتسلسلة متقاربة فإن المتسلسلة غير متقاربة بانتظام على المجال I.

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

معرفة على $I=]0,\infty[$

هل المتسلسلة متقاربة؟

نأخذ متتالية مجاميعها الجزئية:

$$s_n(x)=1+\frac{1}{e^x}+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+\left(\frac{1}{e^x}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{e^x}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x-1}$$

متسلسلة هندسية أساسها $r=\frac{1}{e^x}$ وهي متقاربة.

و نهاية الحد العام:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{nx}}=0$$

يسعى للتابع الصفري .هل هو متقارب بانتظام أم لا؟

$$\lim_{n\to\infty} sup|f_n(x)-f(x)|$$
$$=\lim_{n\to\infty} sup\left|\frac{1}{e^{nx}}-0\right|=1\neq 0$$

ومنه الحد العام لا يسعى بانتظام للتابع الصفري فالمتسلسلة غير متقاربة بانتظام.

مبرهنة(٢):

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام على المجال I هو أنه لأجل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

عندما $m > n > 0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

((تنتج مباشرة من كون متتالية المجاميع الجزئية هي متتالية كوشي في حالة التقارب المنتظم))

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ معرفة على $I = [-p,p]$ حيث $0 < p < 1$

ليكن $\varepsilon > 0$ عندئذٍ يوجد عدد طبيعي بحيث يكون $N > \frac{(\ln \varepsilon - \ln(1+P))}{\ln p}$ ((نختاره بعد حل المتراجحة أدناه)

$$m > n > N_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|$$

$$= |(x^n - x^{n+2}) + (x^{n+1} - x^{n+3}) + (x^{n+2} - x^{n+4}) + \cdots + (x^{m-1} - x^{m+1}) + (x^m - x^{m+2})|$$

بالاختصار نجد أن:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = |x^n + x^{n+1} - (x^{m+1} + x^{m+2})|$$

$$= |x^n(1+x) - x^{m+1}(1+x)| = |1+x||x^n - x^{m+1}| = |1+x||x|^n|1 - x^{m-n+1}| < |1+x||x|^n < (1+p)p^n$$

و نريد جعل $(1+p)p^n < \varepsilon$ و هذا يكافئ أم $\ln(1+p) + n\ln(p) < \ln \varepsilon$ و منه :

$$n > \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+p)}{\ln p} \quad : p < 1$$

و بالتالي نختار $N_0 \geq \max(1, \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+p)}{\ln p})$

ومنه المتسلسلة متقاربة بانتظام حسب المبرهنة(٢).

مبرهنة: (اختبار فايرستراش)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على المجال I وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة عددية متقاربة، ذات حدود موجبة بحيث يكون $|f_n(x)| \leq b_n$

مهما كانت n من N و x من I عندئذٍ:

١) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بإطلاق على المجال I

٢) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I

مثال: المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

معرفة على $\mathbb{R}$

الحل:

$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \& \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ فإن:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة لأنها متسلسلة ريمانية من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ حيث $p = 2 > 1$

ومنه المتسلسلة متقاربة.

ومنه المتسلسلة $\frac{\sin nx}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بإطلاق وحسب اختبار فايرشتراس هي متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

تذكرة: نقول عن المتسلسلة العددية الكيفية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها متقاربة بإطلاق إذا تقاربت المتسلسلة المؤلفة من القيم المطلقة لحدودها أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ متقاربة } \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متقاربة باطلاق}$$

ملاحظة: إذا كانت المتسلسلة متقاربة بإطلاق فهي متقاربة.

" انتهت المحاضرة "