التحليل 3

الدكتور: يحيى قطيش

المحاضرة : السادسة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/٦

إعداد : نذير تيناوي

التكاملات التابعة لوسيط

ليكن لدينا التابع $f(x,t)$ معرف من أجل $x \in [a,b]$ و $t \in I = [t_1, t_2]$ و أنه من أجل قيمة مثبتة t من I يكون التابع $f(x,t)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ و لنبدأ بالدراسة التالية :

تعريف :نسمي التكامل

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

حيث a, b تابعين لـ t بالتكامل التابع للوسيط t معرف على I.

مبرهنة (١) : إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق

$$[a,b] \times [t_1, t_2] = \{(x,t) : x \in [a,b], t \in [t_1, t_2]\}$$

حيث a, b, t_1, t_2 ثوابت حقيقية ، فإن التكامل

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

هو تابع مستمر بالنسبة للوسيط t.

البرهان :

لتكن $t_0 \in I$ نقطة كيفية من المجال I عندئذٍ نريد إثبات أن :

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$$

و لدينا فرضاً أن $f(x,t)$ مستمر من أجل كل t من I أي :

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,t) - f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

لنأخذ :

$$|F(t) - F(t_0)| = \left| \int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b f(x,t_0)\,dx \right| = \left| \int_a^b \big(f(x,t) - f(x,t_0)\big)dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x,t)-f(x,t_0)|dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}[x]_a^b = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

أي أن $F(t)$ مستمر عند t_0 و بما أن $t_0 \in [t_1,t_2]$ كيفية من $[t_1,t_2]$ نجد أن $\mathrm{F(t)}$ مستمر على المجال المغلق $[t_1,t_2]$.

#نتيجة : إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ مستمر على المستطيل المغلق $[a,b]\times[t_1,t_2]$ يمكن التبديل بين رمزي النهاية و التكامل فنكتب :

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f(x,t_0)dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx$$

££ قاعدة لايبتنز ££:

مبرهنة(٢) : إذا كان التابع المكامل $f(x,t)$ و مشتقه الجزئي بالنسبة للوسيط t أي $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمرين على المستطيل

$[a,b]\times[t_1,t_2]$ فإن التابع $F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ قابل للاشتقاق بالنسبة لـ t على المجال $[t_1,t_2]$

و يكون :

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

الإثبات : لتكن $t, t+\Delta t$ نقطتين من المجال $[t_1,t_2]$ و لنأخذ :

$$F(t+\Delta t)-F(t) = \int_a^b f(x,t+\Delta t)dx - \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \big(f(x,\Delta t)-f(x,t)\big)dx$$

و حسب دستور التزايدات المنتهية فإن :

$$\frac{\big(f(x,t+\Delta t)-f(x,t)\big)}{\Delta t} = \frac{\partial f(x,t+\theta\Delta t)}{\partial t} \quad : 0<\theta<1$$

و بالتالي نكتب :

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\int_a^b \frac{\left(f(x,t+\Delta t)-f(x,t)\right)}{\Delta t}dx$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t \to 0$ نحصل على :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\int_a^b \frac{\left(f(x,t+\Delta t)-f(x,t)\right)}{\Delta t}dx=\int_a^b \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(f(x,t+\Delta t)-f(x,t)\right)}{\Delta t}dx$$

$$\boxed{\mathbf{F'(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx}}$$

و ذلك لأن : $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ تابع مستمر على المستطيل R.

مثال : أوجد $\frac{dF(t)}{dt}$ حيث

$$F(t)=\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dx$$

لنتحقق بدايةً من شروط مبرهنة لايبتنز :

لدينا التابع المكامل : $f(x,t)=\ln(x^2+t^2)$ مستمر على المستطيل $[0,1]\times[t_1,t_2]$ حيث $0<t_1$

كذلك فإن المشتق الجزئي $\frac{2t}{x^2+t^2}=\frac{\partial \ln(x^2+t^2)}{\partial t}=\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ و هذا التابع أيضاً مستمر على المستطيل المذكور سابقاً ، فشروط قاعدة لايبتنز محقق. لذلك نكتب :

$$\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dx=\int_0^1 \frac{\partial \ln(x^2+t^2)}{\partial t}dx=\int_0^1 \frac{2t}{x^2+t^2}dx$$

$$=\left[2\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1}=2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

و لكي نعرف تماماً ما هي فائدة قاعدة لايبتنز ، سنعيد حل التمرين السابق دون الاستفادة من قاعدة لايبتنز و ذلك بأن نجري المكاملة أولاً ثم نوجد المشتق.

$$F(t)=\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dx$$

نكامل بالتجزئة فنفرض :

$$u=\ln(x^2+t^2)\Rightarrow du=\frac{2x}{x^2+t^2}dx$$
$$dv=dx\Longrightarrow v=x$$

إذن يكون :

$$F(t)=[x\ln(x^2+t^2)]_{x=0}^{x=1}-2\int_0^1\frac{x^2+t^2-t^2}{x^2+t^2}dx$$

$$=\ln(1+t^2)-2\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{x^2+t^2}\right)dx=\ln(1+t^2)-2[x]_{x=0}^{x=1}+2\left[t\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{F(t)}=\ln(1+t^2)-2+2\arctan\frac{1}{t}$$

الآن و قد أوجدنا F(t) نوجد مشتقه بالنسبة للمتحول المستقل t

$$\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\ln(1+t^2)-2+2t\arctan\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}-0+2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)+2\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}.t=2\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

نلاحظ أنه حصلنا على نفس النتيجة و لكن بكلفة أكبر بسبب الحاجة لإجراء المكاملة أولاً بطريقة التجزئة ..لذا استخدام قاعدة لايبتنز كان مفيداً جداً .

تعريف : نقول عن التكامل المعتل التابع لوسيط $F(t)=\int_a^\infty f(x,t)dx$ حيث $x\geq a,t_1\leq t\leq t_2$ إنه متقارب بانتظام بالنسبة لـ t إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد K_ε بحيث يكون :

$$\left|\int_a^\infty f(x,t)dx-\int_a^\eta f(x,t)dx\right|=\left|\int_\eta^\infty f(x,t)dx\right|<K_\varepsilon$$

و ذلك لكل $\eta > K_\varepsilon$.

#ملاحظة : يمكن تطبي قاعدة لايبتنز على التكاملات المعتلة التالبعة لوسيط .

مبرهنة (٣) : إذا كان التابع $f(x,t)$ مستمراً من أجل $x \geq a$ و $t_1 \leq t \leq t_2$ و كان التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x,t)dx$ متقارب بانتظام بالنسبة لـ $t \in [t_1,t_2]$ فإن التابع $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ يكون مستمراً على المجال $[t_1,t_2]$.

مثال: أثبت أن $F(t)$ تابع مستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث :

$$F(t) = \int_1^\infty \frac{t^2 - x^2}{(x^2+t^2)^2} dx$$

الحل: لدينا $f(x,t) = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$ تابع مستمر من أجل كل $t \in [t_1,t_2]$ و $x \in [1,\infty[$ و نثبت أن التكامل المعطى متقارب بانتظام بالنسبة لـ t :

ليكن $\varepsilon > 0$ فيوجد $\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{نضعها بعد الحل}} \geq K_\varepsilon$ بحيث :

$$\left|\int_\eta^\infty f(x,t)dx\right| = \left|\int_\eta^\infty \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}dx\right| = \left|\left[\frac{x}{t^2+x^2}\right]_{x=\eta}^\infty\right| = \frac{\eta}{\eta^2+t^2} < \frac{1}{\eta} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \eta > \frac{1}{\varepsilon}$$

إذاً $F(t)$ هو تكامل متقارب بانتظام بالنسبة لـ t من R .

و بالتالي $F(t)$ مستمر.

"انتهت المحاضرة"

نذير تيناوي