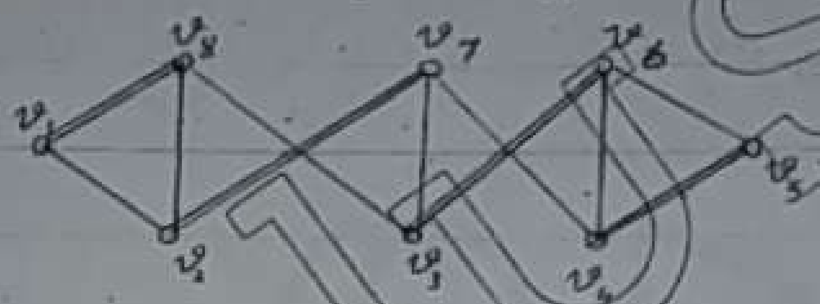
## السيطرة:

لتكن $G(V,E)$ ، $v\in V$ ، ولتكن $N(v)$ الجوار المفتوح ، $N[v]$ الجوار المغلق.

إن الـ Matching هي تغطية لأضلاع البيان بحيث عن أقل عدد ممكن من العقد بحيث تغطي أكبر عدد ممكن من العقد. وبالتالي نحصل على Domination أي أن:

- السيطرة (تغطية العقد) (Domination): أقل عدد ممكن من الرؤوس (العقد) بحيث تجاور أكبر عدد ممكن من عقد البيان.

مثال: أوجد تغطية العقد للبيان التالي:




الـ Matching اخترناه مثلاً: $\{(v_1,v_8),(v_2,v_7),(v_3,v_6),(v_4,v_5)\}$

لنوجد تغطية هذا البيان:

$D_1=\{v_2,v_8\}$ ، $D_2=\{v_4,v_8\}$

هي تغطية لأن: $v_4$ ترتبط مع $\{v_3,v_5,v_7,v_6\}$

$v_8$ ترتبط مع $\{v_8,v_1,v_2,v_3\}$

وبالتالي من خلال العقدتين $v_4$ ، $v_8$ استطعنا ربط كل عقد البيان.

وهي تغطية أصغرية لأنه لا يمكن الحصول على تغطية تحوي أقل من عقدتين وتصل بين جميع العقد.

نسمي $\delta(G)$ عدد عناصر أقل سيطرة (تغطية).

في هذا المثال $\delta(G)=2$ .

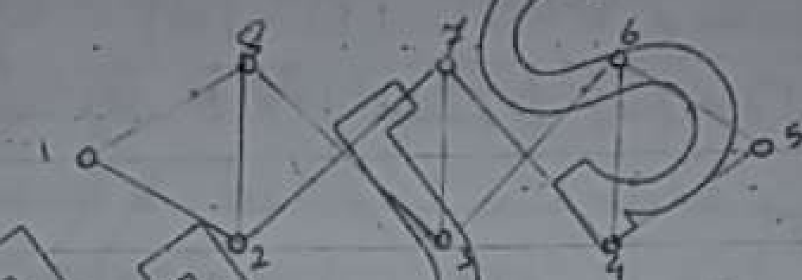
## مبرهنة أور Or theory 1962

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ حيث: $|V|=n$ , $|E|=m$ بيان بسيط مترابط
ولتكن $D$ أصغر مجموعة مسيطرة لهذا البيان عندئذ تكون المجموعة المتممة لها:
$(V(G)-D)$ مجموعة مسيطرة للبيان $G$ ..

الإثبات:

إذا كانت $D$ مجموعة مسيطرة أصغرية للبيان $G$ عندئذ: $\forall v \in V$ يكون:
إما: $v \in V(G)-D \Rightarrow v$ مسيطرة على نفسها ..
أو: $v \in D \Rightarrow \exists w \in V(G)-D \Rightarrow w$ مسيطر على $v$ من خلال الضلع $(w,v)$ حيث $(w,v) \in E(G)$
$\Rightarrow$ بالحالتين مسيطرة أي المجموعة $D$ مجموعة مسيطرة.

مثال:



لتكن $D$ منطقة أصغرية: $D=\{2,6\} \Rightarrow$
$V(G)-D=\{1,3,5,7,8,4\}$ أيضاً منطقة للبيان

ملاحظة:

أي مجموعة مسيطرة (ليس شرط أن تكون أصغرية) إذا طرحت من مجموعة عقد البيان نحصل على مجموعة مسيطرة.

مبرهنة: ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ ، $|V|=n$ ، $|E|=m$ ،
$D$ مجموعة مسيطرة فإن: $D$ مجموعة مسيطرة أصغرية $\Longleftrightarrow$ إما: $v$ عقدة معزولة. $\forall v \in D$
أو: $\exists w \in V-D$ ; $N(w) \cap D = \{v\}$

الإثبات: نفرض أن $D$ مجموعة مسيطرة أصغرية للبيان $G$ عندئذ يكون:
$\forall v \in D$ فإن المجموعة $D-\{v\}$ ليست مجموعة مسيطرة وهذا يعني أنه يوجد
رأس $w$ غير مغطاة بأي عقدة ($w$ غير مغطاة بأي عقدة من $D-\{v\}$) $(\exists w \in V(G)-D ; D-\{v\}$
نميز حالتين: إما: $w=v \Rightarrow$ العقدة $v$ عقدة معزولة

أو: إذا كانت $\omega \neq v$ فالعقدة $\omega$ ليست مغطاة بالعقدة $v$ ⇐ أي يوجد ضلع $(\omega v) \in E$ ⇐ $N(\omega)\cap D = \{v\}$

($\Rightarrow$): لنفرض أن $D$ مجموعة سيطرة تحقق الشرطين:

إما $\forall v \in D$ فإن $v$ معزولة أو $\exists \omega \in V(G)-D : N(\omega)\cap D=\{v\}$

ولنثبت أن: $D$ مجموعة سيطرة أصغرية.

سنفرض جدلاً أن $D$ ليست أصغرية ⇐ $\exists u \in D,\ D-\{u\}$ تبقى مجموعة سيطرة، وبالتالي العقدة $u$ تجاور على الأقل عقدة من $D-\{u\}$ وهذا يعني أن الشرط الأول غير محقق ($u$ ليست معزولة) عندئذٍ يكون:

$\{D-\{u\}\}$ مجموعة سيطرة و $V(G)-\{D-\{u\}\}$ مجموعة سيطرة.

عندئذٍ كل عقدة من هذه المجموعة تجاور على الأقل عقدة من $D-\{u\}$ وهذا الشرط غير محقق بالنسبة للعقدة $u$.. أي لا يوجد عقدة مثل $\omega$ بحيث:

$$\omega \in V-\{D-\{u\}\} : N(\omega)\cap\{D-\{u\}\} = \{u\}$$

وهذا تناقض كون الشرط يجب أن يكون محققاً وبالتالي $D$ مجموعة سيطرة.

نظرية: ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ و $|V|=n$ و $|E|=m$ والبيان بسيط ومترابط عندئذٍ تكون العلاقة التالية محققة:

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$$

الإثبات: لتكن $D$ مجموعة سيطرة لـ $G$:

نعلم أن كل عقدة تسيطر على نفسها وعلى العقد المجاورة لها وبالتالي تكون السيطرة على الأكثر $1+\Delta(G)$.. نستنتج أن: $\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (*)

لأجل كل عقدة $v$ لها أكبر درجة في البيان.. درجة أكبر عقدة..

$$\forall v \in V(G) : \rho(v) = \Delta(G)$$

عندئذٍ: العقدة $v$ تسيطر على نفسها وجوارها $N[v]$ وبالتالي يكون لدينا:

$V(G)-N[v]$ تسيطر على نفسها ⇐ وبالتالي هي مجموعة سيطرة ومنه

$\gamma(G) = n-\Delta(G)$ (**)، من (*) و(**) ينتج المطلوب.

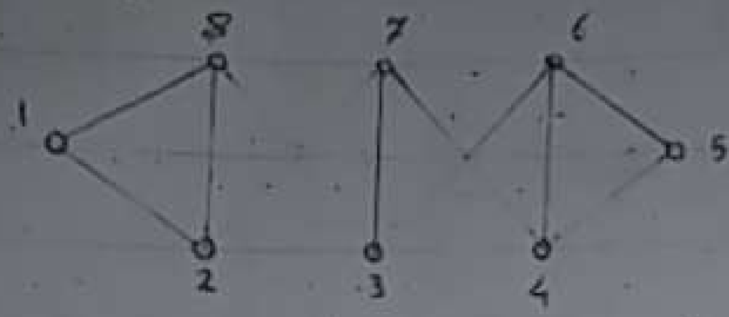
توضيح: معنى الرمز ( ⌈ ) يعني أول عدد صحيح بعد العدد النسبي مثل:

$\lceil 5.3 \rceil = 6$ ، $\lceil 5 \rceil = 5$ .

والرمز ( ⌊ ) يعني أول عدد صحيح قبل العدد النسبي مثل:

$\lfloor 5.3 \rfloor = 5$ ، $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

مثال عن المبرهنة :



$\Delta(G)$: أكبر درجة عقدة $= 3$ ، $\gamma(G) = 2$ عدد عناصر أقل مهيمنة ، $n = 8$

$$\left\lceil \frac{8}{1+3} \right\rceil = 2 \leq 2 \leq 8 - 3 = 5$$

مسائل مفتوحة ولها تطبيقات عديدة في المجال الصناعي والاقتصادي:

النظرية Vizing theory (1963)

وإذا كان G بيان و H بيان فإن:

$\gamma(H \times G) \geq \gamma(H) \times \gamma(G)$

مثال:

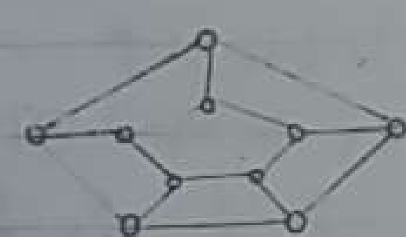
$H = K_2$

$\gamma(H) = 1$

$G = C_5$

$\gamma(G) = 2$

$H \times G \Rightarrow$



$\gamma(G \times H) = 3 \Rightarrow 3 \geq 2 \times 1 = 2$

$\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$

ولكن كل هذه المسائل ، وما زال الأمر مفتوحاً حتى هذا التاريخ وخاصة في بيانات الشبكة المستوية . $P_m \times P_n$ وهي عبارة عن جداء مسارين:

$|P_n| = n - 1$ ، $|P_m| = m - 1$

(1983) Kinch theory مبرهنة

كانت الاعداد :

I) $\gamma(P_1 \times P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

II) $\gamma(P_2 \times C_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

III) $\gamma(P_3 \times P_n) = n - \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$

IV) $\gamma(P_4 \times P_n) = n+1 \;;\; n = 1, 2, 3, 5, 6, 9$

$\gamma(P_4 \times P_n) = n \;;\; n \neq 1, 2, 3, 5, 6, 9$

(1993) chank & clark

I) $\gamma(P_5 \times P_n) = n + 1 + \lfloor \frac{n+k}{5} \rfloor \;;\; n = 2, 3, 7$

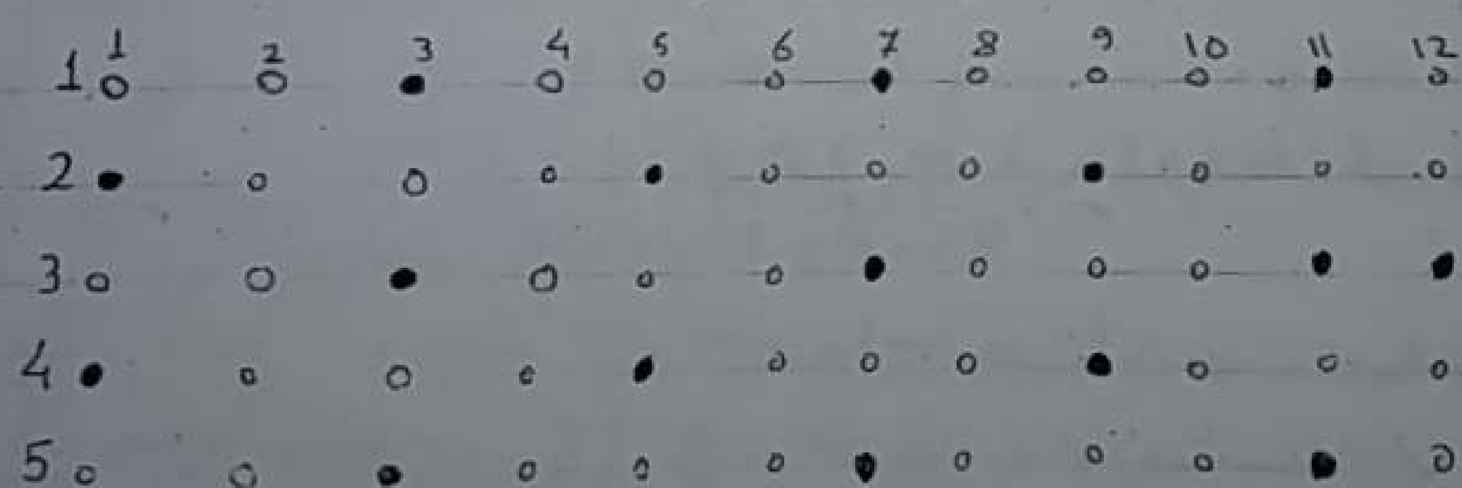
II) $\gamma(P_5 \times P_n) = n + 1 + \lfloor \frac{n+3}{5} \rfloor \;;\; n \neq 2, 3, 7$

III) $\gamma(P_6 \times P_n) = n + 1 + \lfloor \frac{3n+3}{5} \rfloor$

مثال : $P_5 \times P_6$ :

$\gamma(P_5 \times P_{12}) = 12 + 1 + \lfloor \frac{12+3}{5} \rfloor$

$= 13 + 3 = 16 \Rightarrow |D| = 16$



ملاحظة حول ~~تعيين~~ نقاط أحمر شنطية في المثال السابقة :

أخذنا نقطتين في أول عمود حيث ارتبطت مع باقي النقاط في العمود وارتبطت مع نقطتين من العمود الثاني ، يبقى ٣ نقاط من العمود الثاني لم ترتبط فتعين ٢ نقطتين من العمود الثالث وبذلك يكون غطينا نقاط العمود الثاني وغطينا نقاط العمود الثالث وهكذا نكمل ...

مثال (2) : $P_5 \times P_6$

لدينا : $\gamma(P_5 \times P_6) = n + 1 + \lfloor \frac{n+3}{5} \rfloor$ , $n \neq 2, 3, 7$

$$\gamma(P_5 \times P_6) = 6 + 1 + \lfloor \frac{9}{5} \rfloor$$

إذن : $\lfloor \frac{9}{5} \rfloor = 1$ لأن $\frac{9}{5} = 1.8$

$$= 6 + 1 + 1 = 8$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ○ |
| 2 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● |
| 3 | ● | ○ | ● | ○ | ○ | ○ |
| 4 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● |
| 5 | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ○ |

نلاحظ أننا من خلال 8 نقاط استطعنا

ملاحظة : تكون العقدة $(i, j)$ تجاور العقدة $(p, q)$ إذا تحقق ما يلي :

$$(i - p) + (j - q) = 1$$

مثال عن الملاحظة : العقدة $(4, 3)$ و $(2, 5)$ ، $4 - 2 + 3 - 5 = 0 \neq 1$

إذن العقدتان غير مرتبطتان ،

العقدة $(3, 2)$ , $(2, 2)$ ، $3 - 2 + 2 - 2 = 1$ $\Leftarrow$ العقدتان مرتبطتان

[illegible]