Syria Math

# تحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : الرابعة عشرة

التاريخ : ٤/١٢/٢٠١٦

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة 14 ‏ ٤/١٩/٢٠١٦م

سوف نبدأ المحاضرة بالفصل الثاني

## استمرار الدوال العددية بمتحول واحد .

* تعريف استمرار الدالة بالشكل المبسط :

لتكن $I$ مجالاً أو اجتماع مجالات في $\mathbb{R}$ ولتكن $f$ دالة معرفة في جوار $x$ عندئذ نقول عن $f$ أنها مستمرة عند $x_0$ إذا تحقق الشروط التالية :

1) الدالة $f$ معرفة عند $x_0$ أي أن $f(x_0)$ موجودة
2) الدالة $f$ معرفة في جوار $x_0$ أي $x_0 \in ]a,b[$
3) إذا تحققت العلاقة التالية :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

* تعريف الاستمرار باستخدام $\varepsilon$ , $\delta$ :

لنقول عن الدالة $f$ المعرفة في جوار $x_0$ (المعرفة على المجال $I = ]a,b[$ حيث $x_0 \in I$) إنها مستمرة عند $x_0$ إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon>0 \,;\, \exists \delta_\varepsilon>0 : |x-x_0|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

مثال :

بين أن التابع $F(x) = \sin x$ مستمر عند كل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ باستخدام $(\varepsilon,\delta)$

- قبل البدء بالحل سوف نذكر ببعض التوابع المثلثية

1)

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

2)

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

الحل : يجب تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon>0 \,;\, \exists \delta_\varepsilon>0 : |x-x_0|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cdot\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

$$= 2\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\cdot\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

وبالتالي :

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\sin\frac{(x-x_0)}{2}\right|$$

تذكرة

$$|\sin x| \leq |x| \;;\; x>0$$

$$\Longrightarrow 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0|$$

(1)

Syria Math

نجد $|x-x_0|<\varepsilon$

نختار:

$$|x-x_0|<\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$$

والتأكد من اختيار $\delta_\varepsilon$ نعوض في التعريف:

$$\forall\varepsilon>0;\ \exists\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}>0;\ |x-x_0|<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow|\sin(x)-\sin(x_0)|\leq2\cdot\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

$$\leq|x-x_0|<\varepsilon$$

* تعريف الاستمرار باستخدام المتتاليات:

نقول عن $f$ المعرفة في جوار $x_0$ إنها مستمرة عند $x_0$ إذا تحقق الشرط التالي:

أن تكون الدالة $f$ معرفة عند $x_0$ إي أن $f(x_0)$ موجودة وأن تكون $f$ معرفة في جوار $x_0$ إي $x_0\in\,]a,b[$ بالإضافة لذلك أن يتحقق الشرط التالي:

$$\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}:\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_0)=f(x_0)$$

إي: من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من قيم $x$ متقاربة من $x_0$ تكون المتتالية $\{f(x_n)\}$ متقاربة من $f(x_0)$ وذلك عندما $x$ تسعى إلى $x_0$

استمرار دالة على مجال مغلق:

نقول عن الدالة $f$ إنها مستمرة عند كل نقطة من المجال المغلق $[a,b]$ إذا تحقق الآتي:

1) أن تكون الدالة $f$ مستمرة عند كل نقطة من المجال المفتوح $]a,b[$

2) أن تكون الدالة $f$ مستمرة عند النقطة $b$ من اليسار

أي

$$\lim_{x\xrightarrow{<}b}f(x)=f(b)$$

3) أن تكون الدالة $f$ مستمرة عند النقطة $a$ من اليمين

إي:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}a}f(x)=f(a)$$

* العمليات على التوابع المستمرة عند النقطة:

ليكن $f, g$ دالتان معرفتان ومستمرتين عند $x_0$ فإن:

1) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow[<]{>}x_0}[f(x)\pm g(x)]=f(x_0)\pm g(x_0)$

2) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow[<]{>}x_0}[f(x)\cdot g(x)]=f(x_0)\cdot g(x_0)$

3) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow[<]{>}x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\ ;\ g(x)\neq0,\ g(x_0)\neq0$

4) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow[<]{>}x_0}((g\circ f)(x))=(g\circ f)(x_0)$

* نقاط الانقطاع:

ليكن $A\subseteq\mathbb{R}$ ; $f:A\to\mathbb{R}$ تابعاً (دالة) و $x_0\in A$ نقول عن $x_0$ إنها نقطة انقطاع للتابع $f$ إذا كان غير مستمر عندها. (لنقطة الانقطاع عدة أنواع هي):

1) النوع الأول:

نقول عن الدالة $f$ إنها تعاني من نقطة انقطاع $x_0$ من النوع الأول إذا وجد $b_1, b_2\in\mathbb{R}$ يحققان:

$$\left.\begin{aligned}&-\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}f(x)=A\\&-\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}f(x)=B\end{aligned}\right\}\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}f(x)\neq\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}f(x)$$

2

مثال..

- ادرس استمرار الدالة $f$ المعرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

وذلك عند النقطة $x = 0$

الحل:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

وبالتالي:

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

فإن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول.

2) النوع الثاني:

نقول عن الدالة $f$ إنها تعاني من نقطة انقطاع $x_0$ من النوع الثاني إذا تحقق الشرط التالي:

إما أنه لا توجد لـ $f(x)$ في النقطة $x_0$ واحدة على الأقل من النهايتين في طرف واحد أو أنه تكون واحدة على الأقل من هاتين النهايتين في طرف واحد غير محدودة.

مثال..

لتكن $f$ دالة معرفة بالشكل التالي:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \; x > 0 \\ x^2 & ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

فنلاحظ أن:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

أي أن $x_0 = 0$ هي نقطة انقطاع في النوع الثاني.

3) النوع الثالث (قابل للإزالة):

نقول عن الدالة $f$ إنها تعاني من نقطة انقطاع $x_0$ في النوع الثالث إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \lim f(x_0)$$

أي أن:

إذا وجدت نهاية محدودة للدالة $f$ في النقطة $x_0$ إلا أن قيمتها $f(x)$ لا تساوي $\lim_{x \to x_0} f(x)$

مثال..

إن النقطة $x = 0$ هي نقطة انقطاع للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 2 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

وذلك لأن

$$\lim f(x) = 1 \; , \; f(0) = 2$$

وبالتالي فإن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة انقطاع في النوع الثالث.

تمارين ..

عين كلاً من a ولكي يكون التابع أو الدالة f مستمرة على R حقق f مونا كما يلي :

1

$$f(x)=\begin{cases} |x|+\dfrac{\sin ax}{x^3} & : x<0 \\ \sqrt{x}+b & : x>0 \\ 8 & : x=0 \end{cases}$$

2

$$f(x)=\begin{cases} x & : x<-1 \\ ax+b & ; -1\leq x\leq 2 \\ 2x-7 & x>2 \end{cases}$$

تمرين إضافي ..

عين قيم الثابتين $a, b$ في أعداد يكون التابع f مستمراً حسب أنه :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & : x>2 \\ bx^3+b & : 1<x\leq 2 \\ x & : x<1 \end{cases}$$

الحل ..

حتى يكون f مستمراً عند النقطتين $x=2$ و $x=1$

يجب تحقق الشرط :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)$$

- ندرس الاستمرار عند $(x=1)$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim (bx^3+b) = 2b$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim x = 1$$

ومنه نات

$$2b=1 \Longrightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

- ندرس الاستمرار عند $x=2$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 2} (x^2+a) = 4+a$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2} \left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

ومنه نات

$$4+a=\frac{9}{2} \Longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

(4)