بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 16/11/2016

الفصل الثالث : " المتتاليات والمتسلسلات العقديّة "

مبرهنة:

النهاية لمتتالية عقديّة إن وجدت فإنّها وحيدة .

البرهان:

نفرض أنَّ a و a' نهايتان مختلفتان لمتتالية عقدية متقاربة $\{z_n\}$ ، فيكون:

$$0 < |a - a'| < |a - z_n + z_n + a'| \leq \underbrace{|z_n - a|}_{\to 0} + \underbrace{|z_n - a'|}_{\to 0} \Rightarrow 0 < |a - a'| \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 < 0$$

وهذا مستحيل إذا الفرض الجدلي خاطئ ، ومنه $a = a'$ والنهاية للمتتالية $\{z_n\}$ وحيدة .

مبرهنة :

$$z_n = x_n + i.y_n$$

إذا كانت المتتاليةالعقدية $\{z_n\}$ متقاربة فإنَّها تكون محدودة .

البرهان:

نعلم أنَّ: $\{z_n\}$ متقاربة $\xLeftrightarrow{\text{حسب مبرهنة سابقة}}$ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقاربتان .

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة سابقة :

$\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ محدودتان وبالتالي (أيضاً حسب مبرهنة سابقة) فإنَّ $\{z_n\}$ محدودة .

ملاحظة:

العكس للمبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة ، أي يمكن أن نجد متتالية محدودة لكنّها غير متقاربة

ومثال على ذلك إنَّ: $\{i^n\}$ متتالية محدودة لأنَّ:

$$|i^n| = (|i|)^n = 1^n = 1 < 2 \ ; \ \forall\, n$$

لكنَّ $\{i^n\}$ متباعدة لأنّها متأرجحة بين أربع قيم.

تعريف:

نقول إنَّ: $z_n \to \infty$ إذا وفقط إذا كان: $|z_n| \to +\infty$.

مثال:

$\{(2i)^n\}$ متتالية نهايتها ∞ ، لأنَّ:

$$|(2i)^n| = |2^n . i^n| = 2^n(1) = 2^n \to \infty$$

ملاحظة:

$$\boxed{z_n \to \infty \Rightarrow z_n \text{ غير محدودة}}$$

ملاحظة (٢):

المتتالية التي حدها العام ثابت ، تكون متقاربة من ذلك الحد .

المتتالية الهندسيّة العقديّة:

هي متتالية حدّها العام من الشكل: $z_n = b.a^n$ ، حيث a و b ثابتان عقديّان ونسمّي b الحد الأوّل و a يسمّى أساس المتتالية.

بفرض $b \neq 0$ ، سنميّز عدّة حالات :

١) $a = 1 \Leftarrow z_n = b(1)^n = b$ متتالية ثابتة فهي متقاربة من b : $\{z_n\} \to b$.

٢) $|a| = 1 \,,\ a \neq 1$ عندئذٍ تكون المتتالية $\{z_n\}$ في هذه الحالة متباعدة ، لأنَّ :

نفرض جدلاً أنَّ المتتالية متقاربة من w_0 :

$$\Rightarrow \underbrace{z_{n+1}}_{\to w_0} = b.a^{n+1} = a(b.a^n) = \underbrace{a.z_n}_{\to a.w_0}$$

ونعلم أن النهاية لمتتالية عقدية هي وحيدة ، وبالتالي:

$$w_0 = a.w_0 \Rightarrow \boxed{w_0 = 0} \ ; a \neq 1$$

ولكن لدينا من جهة أخرى:

$$|z_n| = |b.a^n| = |b|.|a^n| = |b|.|a|^n = |b|.1 = |b| \neq 0$$
$$\Rightarrow |z_n| = |b| \nrightarrow 0 \Rightarrow \boxed{z_n \nrightarrow 0 = w_0}$$

وهذا تناقض ، إذاً في هذه الحالة تكون $\{z_n\}$ متباعدة.

٣) $|a| > 1$: وفي هذه الحلة يكون:

$$|z_n| = |b.a^n| = |b|.|a|^n \longrightarrow \infty \Rightarrow b.a^n = z_n \longrightarrow \infty$$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ متباعدة .

٤) $|a| < 1$: عندئذٍ يكون:

$$|z_n| = |b.a^n| = |b|.(a)^n \longrightarrow 0 \Rightarrow b.a^n = z_n \longrightarrow 0$$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ متقاربة.

أمثلة:

١- $\{(3i)^n\}$ متباعدة لأنّها هندسيّة أساسها $a = 3i$ و $|a| = |3i| = 3 > 1$.

٢- $\{(i)^n\}$ ، هندسيّة أساسها $a = i \neq 1$ لكن: $|a| = |i| = 1$ ، وبالتالي فهي متباعدة .

٣- $\left\{\left(\frac{1}{2} + i.\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ ، هندسيّة أساسها $a = \left(\frac{1}{2} + i.\frac{1}{3}\right)$

ولدينا : $|a| = \left|\frac{1}{2} + i.\frac{1}{3}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1$ فهي متقاربة .

نقطة تجمّع متتالية:

نقول عن عدد عقدي a إنّها نقطة تجمّع لمتتالية $\{z_n\}$ ، إذا وفقط إذا حوى أيّ جوار لـ a (قرص مركزه a) عدداً غير منتهٍ من حدود المتتالية .

مثال:

للمتتالية $\{i^n\}$ أربع نقاط تجمّع هي : $\{1, -1, -i, i\}$ ، ونلاحظ أنّ نقطة التجمع لمتتالية هي ليست بالضرورة نقطة تجمّع لمجموعة قيمها.

نتيجة:

إنَّ نهاية أي متتالية متقاربة هي نقطة التجمع الوحيدة لهذه المتتالية ، أي:

$$\boxed{\{z_n\} \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \text{ لـ } \{z_n\} \text{ نقطة تجمع وحيدة}}$$

المتتالية العقدية الكوشية:

نقول عن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ ، إنّها كوشية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists N \geq 0 \,, m, n \geq N \;\Rightarrow\; |z_m - z_n| < \varepsilon$$

مبرهنة:

في أي فضاء متري إن كل متتالية متقاربة هي كوشية ، والعكس بالحالة العامة غير صحيح.

عندما يكون العكس صحيحاً في فضاء متري ، فإنّنا ندعوه فضاءً تاماً ، ((والفضاء $\mathbb{C}$ فضاء متري تام)).

مبرهنة (٢):

$$\{z_n\} \text{ كوشية في } \mathbb{C} \Leftrightarrow \{x_n\},\{y_n\} \text{ كوشيتان في } \mathbb{R}$$

البرهان:

من جهة: ليكن $\{z_n\}$ متتالية كوشية في $\mathbb{C}$ عندئذٍ حسب تعريف المتتالية الكوشية :

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists N \geq 0 \,, m,n \geq N \;\Rightarrow\; |z_m - z_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_m - x_n| \leq \; |z_m - z_n| < \varepsilon \;\Rightarrow \{x_n\} \text{ كوشية } \mathbb{R} \\ |y_m - y_n| \leq \; |z_m - z_n| < \varepsilon \;\Rightarrow \{y_n\} \text{ كوشية } \mathbb{R} \end{cases}$$

ومن جهة أخرى بفرض: $\{x_n\},\{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$ ، عندئذٍ وكون $\mathbb{R}$ فضاء تام ، فإنَّ :

$\{x_n\},\{y_n\}$ متقاربتان في $\mathbb{R}$ ، وبالتالي (حسب مبرهنة سابقة) فإنَّ $\{z_n\}$ متقاربة في $\mathbb{C}$ ،

وكون $\mathbb{C}$ فضاء تام فإنَّ $\{z_n\}$ كوشية في $\mathbb{C}$ ■

خواص نهاية متتالية عقدية:

(1) مجموع متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة ونهايتها هو مجموع النهايتين ، والعكس غير صحيح بالضرورة ، **فمثلاً:**

ليكن لدينا المتتاليتين $\{(-1)^{n+1}\},\{(-1)^n\}$ المتباعدتان في $\mathbb{C}$ ، لكنَّنا نجد أنَ مجموع المتتاليتين:

$$\{(-1)^n + (-1)^{n+1}\} = \{0\} \to 0$$

هي متتالية متقاربة إلى الصفر.

(2) ليكن $\lambda \neq 0$ ثابت عقدي ، عندئذٍ فإنَّ:

$$\{z_n\} \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{\lambda . z_n\}\text{متقاربة}$$

ويكون:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda . z_n = \lambda . \lim_{n\to\infty} z_n$$

(3) جداء متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة ونهايتها هو جداء النهايتين ، والعكس غير صحيح في الحالة العامة ، **فمثلاً:**

ليكن لدينا المتتاليتين: $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0 \quad , \quad \{n\} \to \infty$ ، لكنَّنا نجد أنَ جداء المتتاليتين:

$$\left\{n . \frac{1}{n}\right\} = \{1\} \to 1$$

هي متتالية متقاربة إلى الواحد.

(4) مقلوب متتالية متقاربة من عدد غيرصفري هو متتالية متقاربة ، ونهايتها مقلوب النهاية ، أي:

$$z_n \to a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_n} \to \frac{1}{a}$$

(5) حاصل قسمة متتاليتين متقاربتين (شرط أن تكون المتتالية التي في المقام غير معدومة) ، هو متتالية متقاربة ، ونهايتها هو نهاية البسط على نهاية المقام.

(6) إنَّ حذف عدد منتهٍ من حدود متتالية ، أو إضافة عدد منتهٍ إلى حدود المتتالية ، لا يؤثر على طبيعة تقاربها أو تباعدها ، ولا يغيّر نهايتها عندما تكون متقاربة.

(7) إنَّ: $\boxed{\{z_n\} \to 0 \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{z_n}\right\} \to \infty}$ ، وأيضاً: $\boxed{\{z_n\} \to \infty \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{z_n}\right\} \to 0}$ ،

ومثال على ذلك المتتاليتين المذكورتين في الخاصة **(4)**.

معايير التقارب ((للمتتاليات العقدية):

لأنَّ $\mathbb{C}$ حقل غير مرتّب كليّاً فلا يمكن استخدام كثير من الخاصات الّتي تطبّق على $\mathbb{R}$ لكن هناك معيار:

 # اختبار المقارنة:

ليكن $\{z_n\}$ و $\{w_n\}$ متتاليتين عقديتين تحقّقان الشرط :

$$\exists\, N\,;\ \forall\, n, m \geq N\ :\ \ |z_m - z_n| \leq |w_m - w_n|$$

عندئذٍ تقارب $\{w_n\}$ يقتضي تقارب $\{z_n\}$.

الإثبات:

فكرته : أن نفرض w_n متقاربة فهي كوشيّة فالشرط التالي محقّق:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \geq 0\,, m, n \geq N \ \Rightarrow |w_m - w_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\,, \exists N \geq 0\,, m, n \geq N \ \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$$

وبالتالي z_n كوشيّة وبالتالي هي متقاربة لأنَّ $\mathbb{C}$ تام .

" انتهت المحاضرة "

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺

إعداد: خالد الشعار