# المعادلات التفاضلية 1

الدكتور : خليل يحيى

المحاضرة : العاشرة

التاريخ : ١٤/١٢/٢٠١٦

إعداد : محمد شهلا & خالد الشعار

Web: www.syriamath.net group: Improve our mathematics

قام الأستاذ عبد الله المليح بإعطاء هذه المحاضرة بدلاً من الدكتور خليل يحيى ، وسنتناول في هذه المحاضرة ما تبقى من حالات المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة $n$ ، ذات الأمثال الثابتة المتجانسة ، وسنستعرض القليل من الغير متجانسة منها (مع طرفٍ ثاني) ، لنبدأ:

ما زلنا ندرس طرق إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة $n$ ذات الأمثال الثابتة:

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ldots (1)$$

وجدنا سابقاً أنَّ المعادلة الجبريّة:

$$a_0 \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n . \lambda = 0$$

والتي أسميناها بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة $(1)$ ، لجذورها ثلاث حالات:

**الحالة الأولى :** جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة ( وتمَّ دراستها في المحاضرة السابقة)

**الحالة الثانية :**

جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية مختلفة إلا أنَّ قسماً منها جذور عقدية مختلفة مترافقة:

إذا كان: $\lambda = a + ib$ جذراً للمعادلة المميّزة فإنَّ مرافقه $\bar{\lambda} = a - ib$ يكون جذراً آخر لها

وبالتالي إذا كان لدينا: $\lambda_1 = a + ib \,, \quad \lambda_2 = a - ib$

فإنَّ الحلول الخاصة تصبح من الشكل:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} . e^{ibx} \quad , \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} . e^{-ibx}$$

وبالتالي يكون الحل العام من الشكل:

$$y = c_1 . e^{ax} . e^{ibx} + c_2 . e^{ax} . e^{-ibx} \ldots (*)$$

نستخدم علاقتي أولر للوصول للحل العام بشكل أبسط:

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx \quad , \quad e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

نعوّض في $(*)$ فنحصل على الحل العام بالشكل:

$$\begin{aligned} y &= c_1 . e^{ax} [\cos bx + i \sin bx] + c_2 . e^{ax} [\cos bx - i \sin bx] \\ &= e^{ax} [(c_1 + c_2) \cos bx + i (c_1 - c_2) \sin bx] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^{ax} [A . \cos bx + B . \sin bx]} \; ; \; A = c_1 + c_2 \;, \; B = i(c_1 - c_2)$$

**مثال:** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$$

**الحل:** نلاحظ أننا أمام معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ذات أمثال ثابتة ،

فتكون الحلول الخاصة هي من الشكل: $y = e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow\ y' = \lambda . e^{\lambda x}\ ,\ y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x}\ ,\ y''' = \lambda^3 . e^{\lambda x}$$

نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow \lambda^3 e^{\lambda x} - 3\lambda^2 e^{\lambda x} + 7\lambda e^{\lambda x} - 5e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x}[\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5] = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0$$ وهي المعادلة المميزة

نلاحظ على أنَّ 1 جذراً للمعادلة ومنه نقسّم (قسمة مطوّلة) المعادلة على $(\lambda - 1)$:

$$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a.c \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(5) = -16 = 16i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 4i$$

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 4i}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 1 + 2i}$$

$$\lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 4i}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 1 - 2i}$$

وبالتالي تكون الحلول الخاصة:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x\ ,\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(1+2i)x}\ ,\ y_3 = e^{\lambda_3 x} = e^{(1-2i)x}$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{(1+2i)x} + c_3 e^{(1-2i)x} \ldots (*)$$

$$e^{(1+2i)x} = e^x . e^{2ix} = e^x[\cos 2x + i \sin 2x] = e^x \cos 2x + ie^x \sin 2x$$

$$e^{(1-2i)x} = e^x . e^{2ix} = e^x[\cos 2x - i \sin 2x] = e^x \cos 2x - ie^x \sin 2x$$

بالتعويض في $(*)$ نجد:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \cos 2x + ic_2 e^x \sin 2x + c_3 e^x \cos 2x - ic_3 e^x \sin 2x$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \cos 2x + ic_2 e^x \sin 2x - ic_3 e^x \sin 2x$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + e^x \cos 2x\,[c_2 + c_3] + e^x \sin 2x\,[ic_2 - ic_3]$$

ومنه الحل العام هو:

$$\boxed{y = c_1 e^x + A_1 . e^x \cos 2x + A_2 . e^x \sin 2x}\ ;\ A_1 = c_2 + c_3\ ,\ A_2 = ic_2 - ic_3$$

**مثال (٢):**

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 4y = 0$$

**الحل:**

نلاحظ أننا أمام معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة ، والمعادلة المميزة لها هي:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i = 0 \pm 2i$$

فالحل العام هو:

$$\boxed{y = e^{0x}(c_1 . \cos 2x + c_2 . \sin 2x) = c_1 . \cos 2x + c_2 . \sin 2x}$$

**مثال آخر:**

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

**الحل:**

نلاحظ أننا أمام معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة ، والمعادلة المميزة لها هي:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

فالحل العام هو:

$$\boxed{y = e^{x}(c_1 . \cos x + c_2 . \sin x)}$$

**#ملحوظة:**

في الامتحان يجب ذكر خطوات الحل بالتفصيل كما في المثال الأوّل ☺

## الحالة الثالثة :

إذا كانت جذور المعادلة المميزة مكررة أي:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$$

فإن الحلول: $\boxed{e^{\lambda_i x} \;;\; (1 \le i \le n)}$ ، لا تمثّل مجموعة الحلول الخاصة ،

بل تمثّل حلّاً واحداً فقط للمعادلة $(1)$ ، لأنَّها غير مستقلة خطيّاً ، أي إنّ العلاقة:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

لا تمثل الحل العام للمعادلة $(1)$ ، لكن بملاحظة أنَّ:

$$y_1 = e^{\lambda . x} \;,\; y_2 = x. e^{\lambda . x} \;,\; y_3 = x^2 . e^{\lambda x} \;, \dots , y_k = x^{(k-1)} . e^{\lambda x}$$

هي حلول مستقلة خطياً ، وبالتالي يكون الحل العام هو:

$$y = c_1 . e^{\lambda . x} + c_2 . x . e^{\lambda . x} + c_3 . x^2 . e^{\lambda x} + \cdots + c_{k-1} . x^{(k-1)} . e^{\lambda x}$$

**مثال :** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y''' - 3y'' + 3y' - y = 0}$$

**الحل :** نلاحظ أننا أمام معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ذات أمثال ثابتة ،

لإيجاد الحل العام لها نفرض الحلول الخاصة من الشكل:

$$y = e^{\lambda x}$$

نشتق ونعوّض في المعادلة:

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \;,\; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \;,\; y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda^3 e^{\lambda x} - 3\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x}[\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1] = 0 \;\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

وهي المعادلة المميزة ، نكتبها بالشكل:

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

وهي جذور حقيقية مكررة وبالتالي تكون الحلول الخاصة هي:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x \;,\; y_2 = x. e^{\lambda_2 x} = xe^x \;,\; y_3 = x^2 . e^{\lambda_3 x} = x^2 e^x$$

وبالتالي الحل العام هو:

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x}$$

## مثال آخر:

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\boldsymbol{y''' - 3y' + 2y = 0}$$

## الحل:

نلاحظ أننا أمام معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ذات أمثال ثابتة ، والمعادلة المميزة لها هي:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \;\Rightarrow (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

وبالتالي الجذور هي:

$\lambda_1 = -2$ جذر بسيط , $\lambda_2 = +1$ جذر مكرر

فالحل العام هو:

$$\boxed{y = c_1.e^{-2x} + c_2.e^{x} + c_3.x.e^{x}}$$

**#ملحوظة:**

في الامتحان يجب ذكر خطوات الحل بالتفصيل كما في المثال الأوّل ☺

---

**توضيح:** على فرض كانت لدينا المعادلة المميزة:

$$\lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

فيكون الحل العام هو:

$$y = c_1.e^{0.x} + c_2.x.e^{0.x} + c_3.e^{x}$$

أمّا إذا كانت من الشكل:

$$(\lambda - 1)(\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0$$

الجذور عقديّة مكرّرة ، فالحل العام هو:

$$y = c_1.e^{x} + e^{0x}(c_2.\cos x + c_3.\sin x) + x.e^{0x}(c_4.\cos x + c_5.\sin x)$$

(هنا $0 \pm i$ مكرر مرتين (الجذران المترافقان مكرران مرتين ) و بالتالي سيقابله المقدار $(e^{0x}(c_2.\cos x + c_3.\sin x) + x.e^{0x}(c_4.\cos x + c_5.\sin x)$

وإذا كانت:

$$(\lambda - 1)^2\left(\lambda - (1 - 2i)\right)^3 = 0$$

فالحل العام هو:

$$y = (c_1 + c_2)e^x + e^x\left((c_3 + c_4.x + c_5.x^2)\cos 2x + (c_6 + c_7.x + c_8.x^2)\sin 2x\right)$$

## المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة $n$ غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة

الشكل العام لهذه المعادلات هو:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \ldots (1)$$

لإيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة يجب أن نوجد أولا الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرفٍ ثانٍ) وليكن $y_Q$ ، ثمَّ نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (مع طرفٍ ثانٍ) وليكن $y_P$ ، وعندئذٍ يكون الحل العام للمعادلة $(1)$ هو:

$$y = y_Q + y_P$$

ولقد درسنا قبلا طريقة إيجاد $y_Q$ ، لكن إيجاد الحل الخاص $y_P$ ، يمكن أن يتم بطريقتين (كلاهما مطلوبتين) ، وسندرس في هذه المحاضرة إحدى الطريقتين (طريقة تشكيل الطرف الثاني) ، وسندرس الطريقة الأخرى (طريقة لاغرانج) في المحاضرات القادمة ..

إذاً لإيجاد الحل الخاص $y_P$ للمعادلة $(1)$ ، اعتماداً على طريقة تشكيل الطرف الثاني $g(x)$ ، نتبع ما يلي:

I. لنفرض أنَّ الدالة $g(x)$ جداء كثير حدود من الدرجة $m$ بدالة أسية، أي من الشكل:

$$L[y] = P_m(x).e^{\alpha x}$$

حيث: $P_m(x)$ حدودية من الدرجة $m$ و $m \geq 0 , \alpha \in R \ or \ \alpha \in \mathbb{C}$ :

عندئذٍ لإيجاد الحل الخاص $y_P$ نميز حالتين:

**1)** $\alpha$ ليست جذراً للمعادلة المميزة:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.\lambda = 0$$

في هذه الحالة سنبحث عن الحل الخاص من الشكل التالي:

$$y_P = q_m(x).e^{\alpha x}$$

حيث: $q_m(x)$ حدودية من الدرجة $m$ بأمثال مجهولة: $q_1, q_2, \ldots, q_m$

يجب تعيينها عن طريق الاشتقاق والتعويض في المعادلة التفاضلية مع طرفٍ ثانٍ ومن ثمَّ نطابق مع أمثال $x$ ونوجد هذه الأمثال $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ثم نقوم بتعويضها بالحل الخاص $y_P$ .

**2)** $\alpha$ جذراً مكرراً للمعادلة المميزة من المرتبة $k$ ; $(k \geq 1)$

عندئذٍ نبحث عن حل خاص من الشكل: $y_P = x^k q_m(x).e^{\alpha x}$

حيث يجب تعيين أمثال كثير الحدود $q_m(x)$ ، ونتابع بنفس الطريقة.

**//.** لنفرض أنَّ الدالة $g(x)$ تمثل:

$$g(x) = e^{\alpha x}\left[P_m^{(1)}(x).\cos bx + P_m^{(2)}(x).\sin bx\right]$$

حيث: $P_m^{(1)}(x)$ و $P_m^{(2)}(x)$ كثيرا حدود مختلفان (لذلك ميزناهما بـ $(1),(2)$ )

بالاستفادة من علاقة أولر نكتب:

$$g(x) = P_m^{(1)}(x).e^{(a+ib)x} + P_m^{(2)}(x).e^{(a-ib)x}$$

لإيجاد الحل الخاص أيضاً نميز حالتين:

**1)** $\alpha = a \pm ib$ ليست جذراً للمعادلة المميزة:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.\lambda = 0$$

في هذه الحالة يكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = e^{\alpha x}\left[P_m^{(1)}(x).\cos bx + P_m^{(2)}(x).\sin bx\right]$$

**2)** $\alpha = a \pm ib$ جذراً مكرراً للمعادلة المميزة من المرتبة $k$ ; $(k \geq 1)$

في هذه الحالة يكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = x^k e^{\alpha x}\left[P_m^{(1)}(x).\cos bx + P_m^{(2)}(x).\sin bx\right]$$

**مثال:**

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y'' - 7y' = 6e^{6x}}$$

**الحل:**

نلحظ أننا أمام معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة غير متجانسة لحلها:

**أولاً:** نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة (دون طرف ثانٍ) :

$$y'' - 7y' = 0$$

المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي: $\lambda^2 - 7\lambda = 0$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda - 7) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 7$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$y_Q = c_1 + c_2 e^{7x}$$

**ثانياً:** نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة:

من المعادلة التفاضلية نلاحظ أنّ الطرف الثاني حدودية من الشكل $P_0(x) = e^{6x}$ ، درجة الحدودية صفر (ثابت) ، نلاحظ أنَّ: $\alpha = 6$ فنعوض في المعادلة المميزة فنجد: $36 - 7(6) \neq 0$

إذاً $\alpha$ ليست جذراً للمعادلة المميزة ومنه:

نبحث عن حل خاص من الشكل: $y_P = A.e^{6x}$

لتعيين $A$ : نشتق: $\Rightarrow y_P' = 6A.e^{6x} \Rightarrow y_P'' = 36A.e^{6x}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$36A.e^{6x} - 7(6)A.e^{6x} = 6e^{6x} \ \Rightarrow \ -6A.e^{6x} = 6e^{6x}$$
$$\Rightarrow \boxed{A = -1}$$

وبالتالي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y_P = -e^{6x}$$

والحل العام المطلوب هو:

$$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{7x} - e^{6x}}$$

---

**انتهت المحاضرة ..**

**المخاطرة الكبيرة هي الحياة بلا مخاطر !**

**والخوف الأكبر هو العيش بلا خوف !!**

**والفشل الحقيقي هو الوقوف خوفاً من الفشل !!!**

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺

## تصويبات هامة :

**المحاضرة ٥ عملي – ص٣ :**

تمرين: أوجد حل المعادلة $3x^2y' - 3x^2y = -y^4$

و الصواب : تمرين: أوجد حل المعادلة $3x^2y' - 3xy = -\frac{1}{x}y^4$

---

**المحاضرة ٣ عملي – ص٣ :**

في السطر الاول : وبالإصلاح نجد $\frac{lny}{\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = \ln(c)$

و الصواب : وبالإصلاح نجد $\ln\frac{lny}{\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = \ln(c)$

---

**المحاضرة ٣ عملي – ص٥ –التمرين١ :**

الصواب:

$$xy' = 3y - 2x - 2(xy - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

نقسم على $x$ :

$$y' = \frac{3y}{x} - 2 - 2\frac{x\left(\frac{y}{x} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{x} \Rightarrow y' = 3\frac{y}{x} - 2 - \left(\frac{y}{x} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

نفرض $z=y/x$ أو $y=zx$ و بالتالي $y' = z + xz'$

$$z + xz' = 3z - 2 - (z-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$xz' = 2z - 2(z-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{z-\sqrt{z-1}}=\frac{2dx}{x}$$

نكامل الطرفين :

$$2\ln|x|=\int\frac{dz}{z-\sqrt{z-1}}$$

و لحسابه نفرض $z-1=t^2$ و بالتالي $dz=2tdt$

$$2\ln|x|=\int\frac{2t-1+1}{t^2-t+1}dt$$

$$2\ln|x|=\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$2\ln|x|=\ln|t^2-t+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

---

**المحاضرة٦ عملي –ص٣:**

تمرين: أوجد حل المعادلة $3x^2y'-3x^2y=-y^4$

**الصواب :** تمرين: أوجد حل المعادلة $3x^2y'-3xy=-\frac{1}{x}y^4$

---