بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 31/10/2016

ما زلنا في دراسة تبولوجيا الأعداد العقدية ووجدنا سابقاً أنَّ مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ تشكّل الفضاء المنظّم $(\mathbb{C},+|.|)$ ، وبالتالي هو فضاء منظّم فهو **فضاء طبولوجي**.

وتطرّقنا إلى بعض المفاهيم الطبولوجية الأساسيّة في الأعداد العقديّة ، منها:

١) الكرة المفتوحة (القرص المفتوح) في $\mathbb{C}$:

$$D(a,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|<r\}$$

٢) النقطة الداخليّة.

٣) وجدنا أنَّ:

$$\boxed{A \text{ مفتوحة } \Leftrightarrow A=A^{o}(A\text{داخل})}$$

٤) وجدنا أنَّ:

$\mathbb{C}\supseteq A$ مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها في $\mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة ، أي:

$\mathbb{C}\supseteq A$ مغلقة $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}/A$ مفتوحة.

٥) نقطة التراكم (النقطة الحدية).

٦) وجدنا أنَّ:

$$\boxed{A \text{ مغلقة } \Leftrightarrow A'\subseteq A}$$

٧) وجدنا أنَّ:

لا يمكن لمجموعة منتهية في $\mathbb{C}$ (ومن أي فضاء متري بشكل عام) أن تملك نقطة تجمّع.

نتيجة (١):

أي مجموعة منتهية A في $\mathbb{C}$ هي مغلقة في $\mathbb{C}$ لأنَّ :

$$A'=\phi\subseteq A$$

نتيجة (٢):

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\{0\}$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ، ((متمِّمَتُهَا مجموعة منتهية)).

ونكمل الآن في التعاريف الطبولوجيّة للأعداد العقديّة:

٦) النقطة الملاصقة:

نقول عن نقطة a من $\mathbb{C}$ إنها ملاصقة للمجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ إذا وفقط إذا حوى أي جوار لـ a نقطة على الأقل من A ، ونرمز لمجموعة النقاط الملاصقة بـ $\bar{A}$ ((لصاقة)) أو ((غلافة)) A .

ملاحظات:

$$(1) \qquad \bar{A} = \underbrace{A}_{\text{المجموعة الأصليّة}} \cup \underbrace{A'}_{\text{مجموعة نقاط التجمع}} \quad , \quad \begin{cases} A' \subseteq \bar{A} \\ A \subseteq \bar{A} \end{cases}$$

$$(2) \qquad \text{منتهية } A \Rightarrow \bar{A} = A \cup A' = A \cup \phi = A$$

$$(3) \qquad \text{مغلقة } A \Leftrightarrow \bar{A} = A$$

(4) ليس من الضروري أن تملك مجموعة غير منتهية من نقاط $\mathbb{C}$ نقاط تجمع ،

فمثلاً: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\} \subseteq \mathbb{C}$ ولا تملك أي نقطة تجمع.

٧) المجموعة المحدودة $A \subseteq \mathbb{C}$:

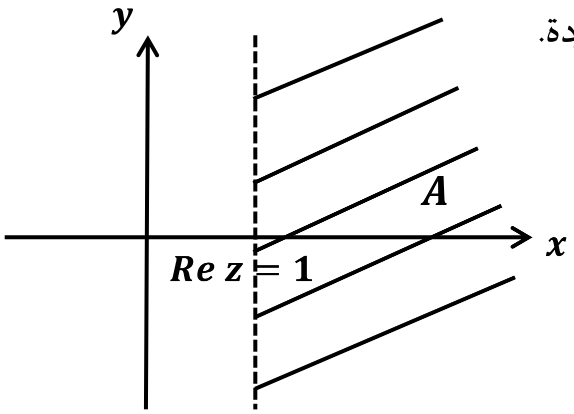
نقول عن A إنّها محدودة إن أمكن جعلها محتواة في قرص نصف قطره محدود ، أي :

$$\boxed{\text{محدودة } A \Leftrightarrow \exists\, 0 < M < \infty : |z| \le M : \forall z \in A}$$

نتيجة: أي مجموعة منتهية هي محدودة .

مثال(١): $\mathbb{N}$ ليست محدودة.

مثال(٢): $A = \{Re\, z > 1\}$ هي أيضاً مجموعة غير محدودة.



أي مستقيم في المستوي العقدي ،
سيقسم المستوي العقدي إلى نصفين ،
كلٌّ منهما مجموعة غير محدودة.

مبرهنة فاير شتراس :

كلُّ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}^n$ غير منتهية ومحدودة تملك نقطة تجمّع واحدة على الأقل.

نعلم أنَّ: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ومنه مبرهنة فاير شتراس محققة في $\mathbb{C}$ ، وأي مجموعة جزئية منها.

مثال:

هل للمجموعة $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ، نقطة تجمع ؟

الجواب:

نعم ، لأنَّ: ١) A مجموعة غير منتهية.

٢) A محدودة ، حيث: $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1 : \forall n \in \mathbb{N}$.

إن نقطة تجمع المجموعة السابقة الوحيدة هي 0 ، أي: $A' = \{0\}$ ، (أثبت ذلك) ، وأثبت أنَّ A ليست مغلقة .

٨) المجموعة المتراصة لـ $A \subseteq \mathbb{C}$:

نقول عن A إنّها متراصة إذا حوت أي تغطية مفتوحة غير منتهية لـ A تغطية جزئية منهية لـ A .

التغطية:

هي مجموعة من الجماعات اجتماعها يحوي كامل المجموعة .

تمرين ((وظيفة)) :

أثبت (باستخدام تعريف المجموعة المتراصة) أنَّ المجموعتان التاليتان غير متراصتان:

١) القرص: $D(0,1)$ ، ٢) $A = \{Re\ z \geq 1\}$.

مبرهنة (١): كل مجموعة متراصة هي مغلقة في أي فضاء طبولوجي.

مبرهنة (٢): كل مجموعة متراصة تكون محدودة في أي فضاء طبولوجي.

إذاً: القرص $D(0,1)$ مجموعة غير متراصة لأنه مجموعة غير مغلقة.

والمجموعة $A = \{Re\ z \geq 1\}$ غير متراصة لأنها مجموعة غير محدودة.

مبرهنة : هاين – بوريل في $\mathbb{R}^n$:

في $\mathbb{R}^n$ إذا كانت المجموعة A محدودة ومغلقة فهي متراصة ، **فمثلاً:**

قرص الواحدة المغلق $\overline{D}(0,1)$ كمجموعة هي متراصة لأنّها مغلقة ومحدودة .

انتهت المحاضرة..

Khalid AL-Shaar