Subject: ______ / /

24/11/2016

المحاضرة 15

تتمة حل المسألة في المحاضرة السابقة:

③ تعيين سرعة وتسارع B:

في جملة ثابتة نشتق $\overrightarrow{O_1B}$ مرة لنوجد السرعة

ومرتين لنوجد التسارع

أو: بتطبيق القانون $\vec{V}(B)=\vec{V}(A)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{O_1B}=x_B\vec{i}_1+y_B\vec{j}_1=\left(a\cdot\cos\theta+a\sqrt{4-\sin^2\theta}\right)\vec{i}_1 \quad ;\ \theta=\omega_1 t$$

$$=\left(a\cos\omega_1 t+a\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}\right)\vec{i}_1$$

نشتق:

$$\vec{V}(B)=-a\left(\omega_1\sin\omega_1 t+\frac{\omega_1\cdot\sin\omega_1 t\cdot\cos\omega_1 t}{\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}}\right)\vec{i}_1$$

بالاشتقاق مرة ثانية نحصل على التسارع:

$$\vec{\Gamma}(B) = -a\,w_1^2 \cdot \cos w_1 t + a\left(\frac{\left(-w_1^2(\cos^2 w_1 t - \sin^2 w_1 t)\cdot\sqrt{4-\sin^2 w_1 t}\right) - \left(\frac{w_1 \sin w_1 t \cdot \cos w_1 t}{\sqrt{4-\sin^2 w_1 t}}\right)(w_1 \sin w_1 t \cos w_1 t)}{4-\sin^2 w_1 t}\right)$$

وهو تسارع B

* طلب إضافي:

عين نقطة من الذراع AB التي تكون سرعتها أصغرية؟

النقطة M هي التي تملك أصغر سرعة لأنها أقل بعد عن I

مسألة:

يتدحرج مخروط دوراني S رأسه O ثابت زاوية الرأسية $\frac{\pi}{4}$ دون انزلاق على السطح الداخلي لمخروط دوراني S_1 مشترك معه بالرأس O زاويته الرأسية $\frac{\pi}{2}$ والمطلوب:

① عين معادلات حركة S علماً بأن نصف قطر قاعدة المخروط S يساوي a وأن القيمة العددية لسرعة مركز قاعدة المخروط A هي $4a$.

② عين سرعة نقطة B في محيط قاعدة S في اللحظة التي تقع فيها B على محور المخروط S.

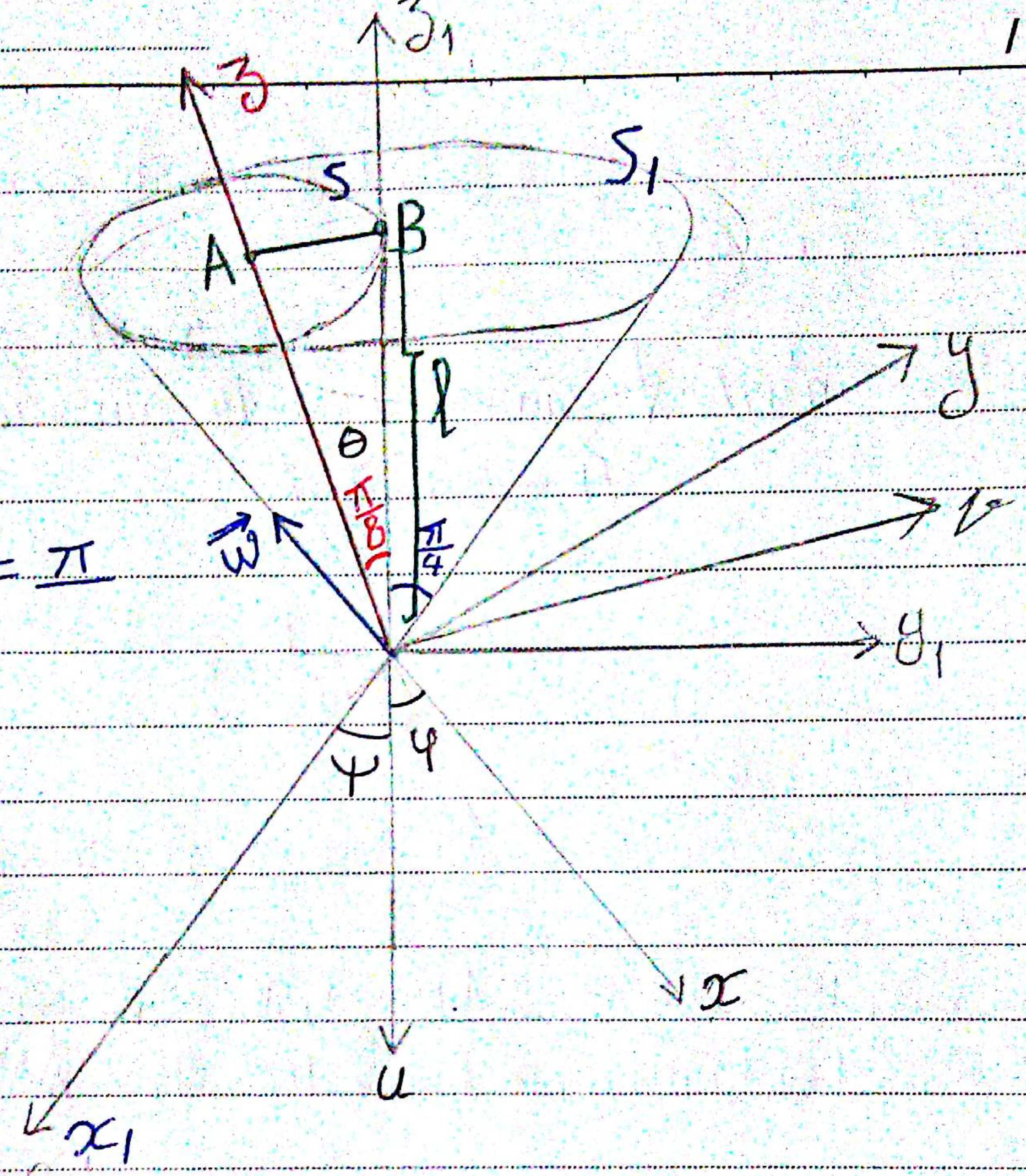
الحل:

1 - إن المولد المشترك للمخروطين هو المحور الآني للدوران

- نوع الحركة حركة دورانية حول نقطة ثابتة ⟸ زوايا أولر

نختار $O x_1 y_1 z_1$ جملة محاور ثابتة بحيث $O z_1$ منطبق على محور المخروط S_1

نختار $O x y z$ جملة محاور متماسكة بحيث $O z$ منطبق على محور المخروط S



$\theta = (\widehat{z, z_1}) = \pi$

إن المحور الآني للدوران هو المولد المشترك للمخروطين لأن الحركة هي تدحرج دون انزلاق ومنه: ثابت مشتقها=0

شعاع الدوران يعطى بالعلاقة: $\vec{w} = \psi' \vec{k_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$

لدينا: $\theta = \frac{\pi}{8} \rightarrow \theta' = 0$ ومنه: $\Rightarrow \vec{w} = \psi' \vec{k_1} + \varphi' \vec{k}$

إن علاقة السرعة في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة تعطى بالعلاقة:

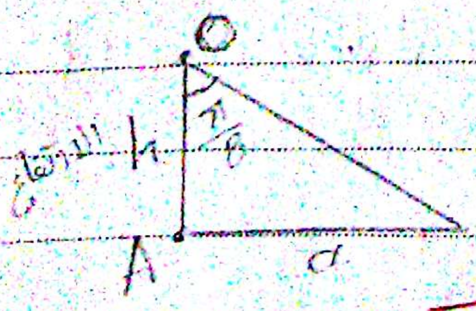
$\vec{V}(A) = \vec{w} \wedge \vec{OA}$

$|\vec{V}(A)| = |\vec{w}| . |\vec{OA}| . \sin\frac{\pi}{8}$

من الفرض $OA = h$

$4a = |w| . h . \sin\frac{\pi}{8}$

حساب h من الرسمة: $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{a}{h}$



$\Rightarrow h = \frac{a}{tg\frac{\pi}{8}}$

$\Rightarrow 4a = |\vec{w}| . \frac{a}{tg\frac{\pi}{8}} . \sin\frac{\pi}{8}$

$$4a = |\vec{w}| \cdot a \cdot \cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{w}| = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}} \quad (1)$$

القيمة العددية لشعاع الدوران

من جهة أخرى:

$\overrightarrow{OA}$ محمول على شعاع الواحدة $\vec{k}$، وطوله h

ومنه

$$\vec{V}(A) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$= (\psi'\vec{k_1} + \varphi'\vec{k}) \wedge (h\vec{k})$$

$$= h\psi'\underbrace{(\vec{k_1} \wedge \vec{k})} + \varphi' h \underbrace{(\vec{k} \wedge \vec{k})}_{=0}$$

$$\underbrace{|k_1|}_{=1} \cdot \underbrace{|k|}_{=1} \cdot \sin\theta$$

الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين أو على نفس الحامل معدوم.

$$\Rightarrow |\vec{V}(A)| = h\psi' \sin\frac{\pi}{8}$$

$$4a = h \cdot \psi' \sin\frac{\pi}{8}$$

$$4a = \frac{a}{tg\frac{\pi}{8}} \cdot \psi' \cdot \sin\frac{\pi}{8}$$

$$a = \cos\frac{\pi}{8} \cdot \psi' \Rightarrow \psi' = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} t + \psi_0$$

من شروط البدء: $t = 0$ ، $\psi = 0$ $\Leftarrow$ $\psi_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} t} \quad (2)$$

بقي معادلة واحدة نخرجها من $|w^2|$.

$$\vec{w} = \psi'\vec{k_1} + \varphi'\vec{k}$$

$$w^2 = (\psi'\vec{k_1} + \varphi'\vec{k})^2$$

$$= \psi'^2 + \varphi'^2 + 2\psi'\varphi' \cos\frac{\pi}{8}$$

نعلم أن $k_1^2 = k^2 = 1$: حيث بعم

ولدينا $\vec{k_1} \cdot k = \cos\frac{\pi}{8}$

AL SAMRAH

Scanned by CamScanner

$$\cancel{\frac{16}{\cos^2\frac{\pi}{8}}} = \cancel{\frac{16}{\cos^2\frac{\pi}{8}}} + \varphi'^2 + 2\,\frac{4}{\cancel{\cos\frac{\pi}{8}}}\,\varphi'\cdot \cancel{\cos\frac{\pi}{8}} \quad : \psi' = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$\boxed{\text{وجدنا}\quad |\vec{w}| = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} \Longrightarrow w^2 = \frac{16}{\cos^2\frac{\pi}{8}}}$$

$$0 = \varphi'^2 + 8\varphi'$$

$$\Longrightarrow \varphi'(\varphi'+8) = 0$$

إما $\varphi' = 0 \Longrightarrow \varphi = C$. مرفوض

أو $\varphi' + 8 = 0 \Longrightarrow \varphi' = -8 \Longrightarrow \varphi = -8t + \varphi_0$

بالمكاملة

$$t = 0\ ,\ \varphi = 0 \Longrightarrow \varphi_0 = 0 \Longrightarrow \varphi = -8t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{w} = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}\,\vec{k}_1 - 8\vec{k}} \quad (3)$$

إن (1) و (2) و (3) معادلات حركة المخروط S

$$\vec{V}(B) = \vec{w} \wedge \vec{OB} = \left(\frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}\vec{k}_1 - 8\vec{k}\right) \wedge L\vec{k}_1 \text{ --- \#} \quad \boxed{2}$$

حيث لدينا $\vec{OB}$ فرضاً محمولة على المولد، ولنفرض أن طول المولد يساوي L.

لنوجد $\vec{k}$ في الجملة الثابتة وذلك باستخدام مصفوفات التحويل السابقة، فنجد:

$$\vec{k} = -\sin\frac{\pi}{8}\,\vec{v}_1 + \cos\frac{\pi}{8}\,\vec{k}_1 \quad : \vec{v}_1 = -\sin\psi\,\vec{i}_1 + \cos\psi\,\vec{j}_1$$

ومنه نجد:

$$= -\sin\frac{\pi}{8}\left(-\sin\psi\,\vec{i}_1 + \cos\psi\,\vec{j}_1\right) + \cos\frac{\pi}{8}\,\vec{k}_1$$

$$\vec{k} = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)(\sin\psi)\,\vec{i}_1 - \sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\psi\,\vec{j}_1 + \cos\frac{\pi}{8}\,\vec{k}_1$$

ومنه بالتعويض بالعلاقة ## نجد أن السرعة :

$$\vec{V}(B) = \left(\frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}\vec{k_1} - 8\left(\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\psi\,\vec{i_1} - \sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\psi\,\vec{j_1} + \cos\frac{\pi}{8}\,k_1\right)\right)\wedge L\vec{k_1}$$

$$\vec{V}(B) = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ -8\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\psi & 8\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\psi & \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} - 8\cos\frac{\pi}{8} \\ 0 & 0 & L \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}(B) = 8\cdot L\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\psi\,\vec{i_1} + 8\cdot L\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\psi\cdot\vec{j_1}$$

انتهت المحاضرة

بيان البشاشي ^^