أسئلة دورات الجبر الخطي ١

Syria Math Team

مجموعة السنة الأولى : طلاب كلية العلوم
قسم الرياضيات ٢٠١٧

مجموعة السنة الثانية : Improve our Mathematics

صفحتنا على فيس بوك : IOM

الرابط facebook.com/MathemagicTeam/

السؤال الأول : أثبت صحة المبرهنة التالية :

ليكن V فضاءً شعاعياً معرفاً على الحقل F و W_1 , W_2 فضائين شعاعيين جزئيين من V عندئذٍ يكون

$W = W_1 + W_2$ مجموعاً مباشراً إذا وفقط إذا تحقق: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

أي : $W = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

الحل :

" $\Leftarrow$ " لنفرض أن $W = W_1 \oplus W_2$ مجموع مباشر للفضاءين الجزئيين W_1 , W_2 ولنأخذ عنصراً كيفياً من التقاطع $W_1 \cap W_2$ ولنثبت إنه صفري

ليكن $w \in W_1 \cap W_2$ عندئذٍ:

$$w \in W_1 \quad \text{وَ} \quad w \in W_2$$

في الحقيقية يمكن كتابة أن:

$$0 = \underbrace{w}_{\in W_1} - \underbrace{w}_{\in W_2} \quad \dots(1)$$

كما أن

$$0 = 0 - 0 \dots(2)$$

ولما كان $W = W_1 \oplus W_2$ مجموعاً مباشراً فإن العنصر 0 يكتب بشكل وحيد على شكل مجموع عنصرين الأول من W_1 والثاني من W_2.

إذاً وبمقارنة (1) مع (2) نجد أن:

$$w = 0$$

وحيث أن w عنصر كيفي من $W_1 \cap W_2$ فينتج أن $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

" $\Longrightarrow$" لنفرض أن $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ولنثبت ان $W = W_1 \oplus W_2$ (مجموع

مباشر)

ليكن $w \in W_1 + W_2$ ولنفرض أن w يكتب بشكلين مختلفين على شكل مجموع عنصرين الأول من W_1 والثاني من W_2 أي:

$$\exists\, w_1 \in W_1 \;,\; w_2 \in W_2 \;:\; w = w_1 + w_2$$

$$\exists\, w_1' \in W_1 \;,\; w_2' \in W_2 \;:\; w = w_1' + w_2'$$

في الحقيقة إن:

$$0 = w - w$$

$$\Rightarrow 0 = (w_1 + w_2) - (w_1' + w_2')$$

$$= (w_1 - w_1') + (w_2 - w_2')$$

$$\Rightarrow (w_1 - w_1') = -(w_2 - w_2')$$

$$\Rightarrow \underbrace{w_1 - w_1'}_{\in W_1} = \underbrace{w_2' - w_2}_{\in W_2} \;\ldots(*)$$

إن $w_1 - w_1' \in W_1$ و $w_2' - w_2 \in W_2$ وهما متساويان حسب (*) وبالتالي:

$$w_1 - w_1' \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_1' = 0 \Rightarrow w_1 = w_1'$$

وَ أيضاً :

$$w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow w_2' - w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = w_2'$$

وبالتالي w يكتب بشكل وحيد على شكل مجموع عنصرين الأول من W_1 والثاني من W_2، إذن:

$$W = W_1 \oplus W_2$$

السؤال الثاني:

لنأخذ الفضاء الشعاعي $V = \mathbb{R}^3$ المعرف على الحقل $F = \mathbb{R}$ و لنأخذ الفضاءين الشعاعيين الجزئيين W_1, W_2 من V كما يلي :

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$$
$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 , y + z = 0\}$$

و المطلوب :

أوجد قاعد و بعد كل من الفضاءين W_1, W_2 ثم أوجد قاعدة و بعد $W_1 \cap W_2$ و هل هما متكاملان أم لا ؟

أوجد قاعدة و بعد $W_1 + W_2$

الحل :

– إيجاد قاعدة و بعد W_1 :

ليكن $(x,y,z) \in W_1$ عندئذٍ:

$$2x + y - z = 0 \Longrightarrow z = 2x + y$$

و بالتالي :

$$W_1 = \{(x,y,2x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,0,2x) + (0,y,y): x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0,2) + y(0,1,1): x,y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1,0,2),(0,1,1)\}$$

نلاحظ أن المجموعة $S_1 = \{v_1 = (1,0,2), v_2 = (0,1,1)\}$ تولد الفضاء W_1 كما أنها مجموعة مستقلة خطياً ذلك لأن $v_1 \neq \lambda v_2$ و بالتالي S_1 قاعدة للفضاء W_1 و يكون بعده :

$$\dim(W_1) = \#S_1 = 2$$

– إيجاد قاعدة و بعد W_2:

ليكن $(x,y,z) \in W_2$ عندئذٍ:

$$x + z = 0 , y + z = 0 \implies x = y = -z$$
$$W_2 = \{(-z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(-1,-1,1): z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{span}\{(-1,-1,1)\}$$

نلاحظ أن المجموعة $S_2 = \{v_3 = (-1,-1,1)\}$ تولد الفضاء W_2 كما أنها مجموعة مستقلة خطياً ذلك لأنها مكونة من عنصر وحيد غير صفري و بالتالي S_2 قاعدة للفضاء W_2 و يكون بعده :

$$\dim(W_2) = \#S_2 = 1$$

– إيجاد قاعدة و بعد $W_1 \cap W_2$:

ليكن $(x,y,z) \in W_1 \cap W_2$ عندئذٍ:

$$2x + y - z = 0 \ldots\ldots (1)$$
$$\left.\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y = -z \ldots (2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد :

$$-4z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$$
$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim(V)$

فهما متكاملان

– إيجاد قاعدة و بعد $W_1 + W_2$:

نعلم أن:

$$W_1 + W_2 = \text{span}\,(S_1 \cup S_2)$$
$$= \text{span}\{v_1 = (1,0,2), v_2 = (0,1,1), v_3 = (-1,-1,1)\}$$

و لنتحقق فيما إذا كانت مستقلة خطياً :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

فالمجموعة

$S = S_1 \cup S_2 = \{v_1 = (1,0,2), v_2 = (0,1,1), v_3 = (-1,-1,1)\}$ تولد $W_1 + W_2$ و مستقلة خطياً

فهي تشكل قاعدة لـ $W_1 + W_2$

"لاحظ أن $W_1 + W_2$ فضاء شعاعي جزئي من V و بعده يساوي بعد V بالتالي $V = W_1 + W_2$"

السؤال الثالث:

ليكن $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً بحيث

$L(x,y,z) = (x+z, x-y, y+z)$ و المطلوب :

١) أوجد صورة الشعاع $v = (1,1,1)$

٢) بين فيما إذا كان التطبيق الخطي L متبايناً أم لا ، هل هو غامر ؟؟ أوجد رتبته و انعداميته؟

٣) أوجد H مصفوفة التطبيق الخطي L بالنسبة للقاعدة القانونية في $\mathbb{R}^3$

٤) ليكن $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً بحيث $T(x,y,z) = (x+y-z, x-y)$ ، أوجد قاعدة ربط التركيب الخطي ToL

الحل:

١) $L(v) = L(1,1,1) = (2,0,2)$

٢) يكون L متبايناً إذا وفق إذا كان $Ker(L) = \{0\}$ ، ليكن $(x,y,z) \in Ker(L)$ عندئذٍ:

$$L(x,y,z) = 0$$
$$(x+z, x-y, y+z) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x+z=0 \\ x-y=0 \\ y+z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x = y = -z$$

فنلاحظ أن :

$$Ker(L) = \{(-z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = Span\{(-1,-1,1)\} \neq \{0\}$$

و بالتالي التطبيق ليس متباين

و نعلم حسب مبرهنة أنه إذا كان بعد المنطلق يساوي بعد المستقر فيكون التطبيق متباين إذا و فقط إذا كان غامراً $\Leftarrow$ L ليس غامراً

$$\text{Nul}(L) = \dim(\ker L) = 1$$
$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \text{Nul}(L) + \text{rank}(L) \Rightarrow \text{rank}(L) = 2$$

٣) نعلم أن القاعدة القانونية في $\mathbb{R}^3$ هي: $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$
فلإيجاد مصفوفة التطبيق الخطي L بالنسبة للقاعدة القانونية في $\mathbb{R}^3$ نوجد صور عناصر قاعدة المنطلق E و نكتبها على شكل تراكيب خطية لعناصر قاعدة المستقر E :

$$L(e_1) = L(1,0,0) = (1,1,0) = e_1 + e_2 + 0e_3$$
$$L(e_2) = L(0,1,0) = (0,-1,1) = 0e_1 - e_2 + e_3$$
$$L(e_3) = L(0,0,1) = (1,0,1) = e_1 + 0e_2 + e_3$$

و عليه تكون :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

٤)

$$ToL: R^3 \to R^2$$
$$(ToL)_{(x,y,z)} = T\big(L(x,y,z)\big) = T(x+z, x-y, y+z) = (2x-2y, y+z)$$

السؤال الرابع :

أوجد مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية :

$$x + y + 2z = 4$$
$$x + y - z = 2$$
$$x + 2y + 7z = 1$$

الحل :

نتبع طريقة غاوس ، نشكل المصفوفة الموسعة :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 4 \\ 1 & 1 & -1 & : & 2 \\ 1 & 2 & 7 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \to -R_1 + R_2 \\ R_3 \to -R_1 + R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 0 & -3 & : & -2 \\ 0 & 1 & 5 & : & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 5 & : & -3 \\ 0 & 0 & -3 & : & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \to -\frac{1}{3}R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 5 & : & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \to -5R_3+R_2 \\ R_1 \to -2R_3+R_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & : & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 \to -R_2+R_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & : & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = 9 \,, y = -\frac{19}{3} \,, z = \frac{2}{3}$$

فمجموعة حلول جملة المعادلات المعطاة هي :

$$S = \left\{\left(9, -\frac{19}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$$

حل الدورة الثانية ٢٠١٦

السؤال الأول:

أولاً: ليكن V فضاءً شعاعياً معرفاً على حقل F ، و لتكن $W_1, W_2, \dots W_n$ فضاءات شعاعية جزئية من V .

أثبت أن $W = W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n$ هو فضاء شعاعي جزئي من V

الحل:

إن $W \subseteq V$ وضوحاً.

بما أن W_i فضاء شعاعي جزئي من V لكل $i = 1,2, \dots, n$ فإن:

$$0_V \in W_i \; \forall \, i = 1,2, \dots, n$$

$$\Rightarrow 0_V \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i = W \Rightarrow W \neq \emptyset$$

ليكن $\alpha, \beta \in F$ و $u, v \in W$ ولنثبت ان $\alpha u + \beta v \in W$:

بما أن $u, v \in W$ فإن $u, v \in W_i$ أياً كانت $i = 1,2, \dots, n$ وبما أن W_i

هو فضاء شعاعي جزئي من V لكل $i = 1,2, \dots, n$ فهذا يعني أن:

$$\alpha u + \beta v \in W_i : i = 1,2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \alpha u + \beta v \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i = W$$

$\Leftarrow$ $W = \cap_{i=1}^{n} W_i$ هو فضاء شعاعي جزئي من V.

نتيجة: التقاطع المنتهي لفضاءات شعاعية جزئية هو فضاء شعاعي جزئي.

ثانياً: ناقش صحة النص الآتي:

ليكن $L: V \to V$ مؤثراً خطياً بحيث V فضاء شعاعي معرف على حقل F عندئذٍ:
مصفوفة المؤثر الخطي L بالنسبة لأي قاعدة مرتبة في V تكون قلوبة

الحل:

لتكن H مصفوفة المؤثر الخطي $L: V \to W$ بحيث يكون $dimV = dimW$
عندئذٍ تكون المصفوفة H قلوبة إذا و فقط إذا كان L تماثلاً
و هنا لدينا $L: V \to V$ أي أن $V = W \Leftarrow dimV = dimW$ لكن لم يُذكر أن L تماثلاً و بالتالي ليس بالضرورة أن تكون مصفوفته قلوبة

السؤال الثاني:

لنأخذ الفضاء الشعاعي $V = R^3$ المعرف على حقل الأعداد الحقيقة و لنأخذ الفضاءين الشعاعيين الجزئيين W_1, W_2 من V كما يلي :

$$W_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x + 2y - z = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x - y + 2z = 0\}$$

أوجد قاعدة و بعد كل من W_1, W_2 ثم أوجد قاعدة و بعد $W_1 \cap W_2$ و هل الفضاءان W_1, W_2 متكاملان أم لا؟

الحل:

- إيجاد قاعدة و بعد W_1:

ليكن $(x, y, z) \in W_1$ عندئذٍ:

$$x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = x + 2y$$
$$\Rightarrow W_1 = \{(x, y, x + 2y) : x, y \in R\}$$

$$= \{(x,0,x) + (0,y,2y) : x,y \in R\}$$
$$= \{x(1,0,1) + y(0,1,2) : x,y \in R\}$$
$$= Span\,\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,2)\}$$

إن المجموعة $S_1 = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,2)\}$ تولد الفضاء W_1 و هي مستقلة خطياً لأنه لا يوجد $\alpha \in R$ بحيث يكون : $v_1 = \alpha v_2$ فهي تشكل قاعدة لـ W_1 ، و بعد الفضاء W_1 هو :

$$\dim W_1 = \#S_1 = 2$$

- إيجاد قاعدة و بعد W_2:

ليكن $(x,y,z) \in W_2$ عندئذٍ:

$$x - y + 2z = 0 \Longrightarrow y = x + 2z$$
$$\Longrightarrow W_2 = \{(x, x+2z, z) : x,z \in R\}$$
$$= \{(x,x,0) + (0,2z,z) : x,z \in R\}$$
$$= \{x(1,1,0) + z(0,2,1) : x,z \in R\}$$
$$= span\,\{w_1 = (1,1,0), w_2 = (0,2,1)\}$$

إن المجموعة $S_2 = \{w_1 = (1,1,0), w_2 = (0,2,1)\}$ تولد الفضاء W_2 و هي مستقلة خطياً لأنه لا يوجد $\alpha \in R$ بحيث يكون : $w_1 = \alpha w_2$ فهي تشكل قاعدة لـ W_2 ، و بعد الفضاء W_2 هو :

$$\dim W_2 = \#S_2 = 2$$

- إيجاد قاعدة و بعد $W_1 \cap W_2$:

ليكن $(x,y,z) \in W_1 \cap W_2$ عندئذٍ:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد:

$$y = z = -x$$
$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{(-x,x,x) : x \in R\} = \{x(-1,1,1) : x \in R\}$$
$$= Span\{(-1,1,1)\}$$

نلاحظ أن المجموعة $S = \{v = (-1,1,1)\}$ تولد الفضاء $W_1 \cap W_2$ كما أنها مستقلة خطياً (مكونة من عنصر واحد غير صفري) فهي قاعدة للفضاء $W_1 \cap W_2$ و بعده يكون : $\dim(W_1 \cap W_2) = \#S = 1$

بما أن: $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ فهما غير متكاملان.

السؤال الثالث:

ليكن $L: R^3 \to R^3$ تطبيقاً خطياً بحيث:

$L(x,y,z) = (x+2y, x-z, x+y+z)$ و المطلوب :

١- أوجد صورة الشعاع $v = (1,1,0)$ وفق التطبيق الخطي L

٢- بين فيما إذا كان التطبيق الخطي متبايناً ؟ هل هو غامر ؟ ثم عين رتبته و انعداميته

٣- وجد M مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3

٤- أوجد M مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 (المنطلق) و القاعدة $A = \{a_1 = (2,1,1), a_2 = (1,2,1), a_3 = (1,1,2)\}$ في المستقر R^3

الحل:

١- صورة الشعاع v هي $L(v) = L(1,1,0) = (3,1,2)$

٢- يكون التطبيق الخطي متبايناً إذا و فقط إذا كان $Ker(L) = \{0\}$

ليكن $(x,y,z) \in Ker(L)$ عندئذٍ:

$$L(x,y,z) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2y, x-z, x+y+z) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ x-z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$$

و هذا يعني أن $Ker(L) = \{0\}$ و بالتالي التطبيق الخطي متباين

- كما أن التطبيق الخطي غامر ذلك حسب المبرهنة التي تنص على أنه إذا كان بعد المنطلق يساوي بعد المستقر فيكون التطبيق الخطي متباين إذا و فقط إذا كان غامراً

غامر $\Leftrightarrow$ متباين

أو بأسلوب أخر فنعلم أن:

$$dimV = \dim(Im(L)) + \dim(Ker(L))$$
$$3 = \dim(Im(L)) + 0 \Rightarrow \dim(Im(L)) = 3$$

إن $Im(L) \subseteq W = R^3$ و $\dim(Im(L)) = 3 = \dim W$ و هذا يقتضي أن: $Im(L) = W$

و بما أن المستقر هو مستقر فعلي فالتطبيق غامر

- رتبته $rank(L) = \dim(Im(L)) = 3$

انعداميته $Nul(L) = \dim(Ker(L)) = 0$

٣- إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدة القانونية E في R^3 حيث: $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ و لأجل ذلك نوجد صور عناصر القاعدة E و نكتبها على شكل تراكيب خطية لعناصر E:

$$L(e_1) = L(1,0,0) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$L(e_2) = L(0,1,0) = (2,0,1) = 2e_1 + 0e_2 + e_3$$
$$L(e_3) = L(0,0,1) = (0,-1,1) = 0e_1 - e_2 + e_3$$

و عليه تكون المصفوفة H المطلوبة هي :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

٤- إيجاد M مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 (المنطلق) و القاعدة $A = \{a_1 = (2,1,1), a_2 = (1,2,1), a_3 = (1,1,2)\}$ في المستقر R^3

لأجل ذلك نوجد صور عناصر قادة المنطلق و نكتبها على شكل تراكيب خطية لعناصر قاعدة المستقر كما يلي :

$$\begin{aligned} L(e_1) = (1,1,1) &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2\, a_2 + \lambda_3\, a_3 \\ &= \lambda_1(2,1,1) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(1,1,2) \\ &= (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\,, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{Bmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow L(e_1) = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3$$

بشكل مماثل :

$$L(e_2) = (2,0,1) = (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\,, \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3, \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)$$

و بالمطابقة نجد:

$$\begin{Bmatrix} 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2 \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mu_1 = \frac{5}{4}\,, \mu_2 = -\frac{3}{4}\,, \mu_3 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow L(e_2) = \frac{5}{4}a_1 - \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3$$

و أخيراً:

$$\begin{aligned} L(e_3) &= (0,-1,1) \\ &= (2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\,, \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3) \end{aligned}$$

و بالتالي يكون:

$$\begin{Bmatrix} 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = -1 \\ \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \beta_1 = 0\,, \beta_2 = -1\,, \beta_3 = 1$$

$$\Rightarrow L(e_3) = 0a_1 - a_2 + a_3$$

و عليه تكون المصفوفة M المطلوبة :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

السؤال الرابع:

أوجد مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية :

$$x + y + 2z = 1$$

$$2x - y + z = 5$$
$$x - 2y - z = 4$$

الحل:

لنحل بطريقة غاوس ، فنشكل المصفوفة الموسعة :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

و لنحاول إيجاد المصفوفة المدرجة المختزلة المكافئة لـ H :

$$H \underset{\substack{R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -R_1 + R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{3}R_2 + R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_1 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to -\frac{1}{2}R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \to -R_2 \\ R_1 \to -R_3 + R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \to -R_3 + R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

و هي المصفوفة المدرجة المختزلة المكافئة لـ H و منها نستنتج أن :

$$x = 4$$
$$y = 1$$
$$z = -2$$

و هو الحل المشترك الوحيد للجملة المعطاة