Syria Math

البنى الجبرية 1

الدكتور : حمزة الحاكمي

المحاضرة : الخامسة والعشرون

التاريخ : ١٩/١٢/٢٠١٦

إعداد : أحمد أبو التوت

ملاحظة : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية في G مرتبتها P^n ويقسم مرتبة G إذا كان p^{n+1}

لا يقسم مرتبة G نقول إن H هي $p-$ زمرة جزئية سيلوفية في G .

تمهيدية : لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G عندئذ :

١) $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$ حيث $\forall a \in G$
تشكل زمرة جزئية في G تسمى الزمرة المرافقة للزمرة الجزئية H .

٢) $NH = \{a : a \in G \ ; aHa^{-1} = H \}$
تشكل زمرة جزئية في G وتسمى مركز H في G .

٣) H زمرة جزئية ناظمية في $N(H)$.

٤) لنفرض أن L مجموعة الزمر الجزئية في G التي تكون H ناظمية فيها عندئذ $N(H)$ عنصر أعظمي في L .

الاثبات :

١) واضح أن $\emptyset \neq aHa^{-1} \subseteq G$ لأن $e = a.e.a^{-1} \in aHa^{-1}$

$$\forall x, y \in aHa^{-1}$$

$$x = ah_1a^{-1} \quad , \quad y = ah_2a^{-1}$$

$$h_1, h_2 \in H$$

$$x.y^{-1} = (ah_1a^{-1}).(ah_2a^{-1})^{-1} = ah_1 \underbrace{a^{-1}.a}_{e} h_2^{-1}a^{-1}$$

$$= ah_1.h_2^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$$

ومنه aHa^{-1} زمرة جزئية في G .

٢) واضح أن $N(H) \subseteq G$ وأن $NH \neq \emptyset$ لأن $e \in N(H)$

ليكن $a, b \in N(H)$ عندئذ لنثبت أن $a.b^{-1} \in N(H)$

$$bHb^{-1} = H \ , aHa^{-1} = H$$

$$aHa^{-1} = H$$

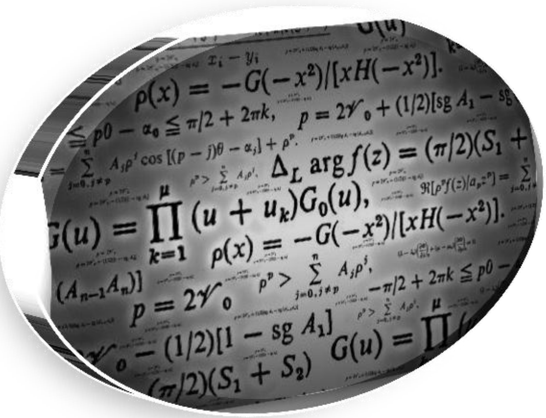
نضرب من اليسار بالعنصر a^{-1} ومن اليمين بالعنصر a نجد :

$$a^{-1}Ha = H$$

وكذلك $bHb^{-1} = H$

نضرب من اليسار بالعنصر b^{-1} ومن اليمين بالعنصر b نجد :

$$b^{-1}Hb = H$$



ومنه $b^{-1}Hb = a^{-1}Ha$

نضرب من اليسار بالعنصر a ومن اليمين بالعنصر a^{-1} نجد :

$$(a.b^{-1})H(ba^{-1}) = a(b^{-1}Hb)a^{-1} = aHa^{-1} = H$$

ومنه $a.b^{-1} \epsilon N(H)$ وبالتالي $N(H)$ زمرة جزئية في G .

٣) قبل إثبات أنها ناظمية لنثبت أن H زمرة جزئية في $N(H)$.

إن H زمرة جزئية في $N(H)$ لأن :

$\forall\, h \epsilon H \,;\, hHh^{-1} = Hh^{-1} = H$

ومنه $h\, \epsilon N(H)$ وبالتالي $H \subseteq N(H)$ و هي ناظمية لأنه

$\forall\, g \epsilon N(H) \;; gHg^{-1} = H$

٤) لتكن k زمرة جزئية في G وأن H ناظمية في K عندئذ :

$\forall\, a \epsilon K \;\; ; aHa^{-1} = H$

ومنه فإن $a \epsilon N(H)$ و هذا يعطي $K \subseteq N(H)$

بقي أن نثبت أن $N(H)$ اعظمي

لتكن M زمرة جزئية اعظمية و ناظمية في H وبالتالي $N(H) \subseteq M$

وأن $M \subseteq N(H)$ وبالتالي $N(H) = M$

$N(H)$ أكبر بالنسبة لعلاقة الاحتواء ((ترتيب جزئي))

وأن $N(H)$ يرتبط مع كل الزمرة الجزئية في G و H ناظمية فيها،بالتالي فهو العنصر الأكبر (وهو عنصر اعظمي)

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية و K هي $P-$ زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها P^n ولنفرض أن H زمرة جزئية في G عندئذ :

١) $H \cap N(K) = H \cap K$
٢) كل زمرة جزئية في G ومترافقة مع K هي $P-$ زمرة جزئية سيلوفية في G .

البرهان :

١) لدينا $K \subseteq N(K)$ ومنه فإن $H \cap K \subseteq H \cap N(K)$

◄لنثبت الاحتواء المعاكس

لنفرض أن $H_1 = H \cap N(K)$ إن H_1 زمرة جزئية في $N(K)$ وايضاً K زمرة جزئية ناظمية في $N(K)$ ومنه فإن $H_1.K$ زمرة جزئية في $N(K)$ لنأخذ زمرة الخارج

$$H_1.K/K \cong H_1/H_1 \cap K$$

وبالتالي

$$(H_1.K/K:1) = (H_1/H_1 \cap K:1)$$
$$(H_1.K:K) = (H_1:H_1 \cap K)$$

وحسب لاغرانج نعلم ان

$$(H_1:1) = (H_1:H_1 \cap K)(H_1 \cap K:1)$$
$$(H_1:1) = (H_1.K:K)(H_1 \cap K:1)$$

ومنه

$$(H_1.K:K) = \frac{(H_1:1)}{(H_1 \cap K:1)}$$

بفرض $(H_1:1) = P^t$ و $(H_1 \cap K:1) = P^s$

وبالتالي

$$(H_1.K:K) = \frac{(H_1:1)}{(H_1 \cap K:1)} = \frac{P^t}{P^s} = P^{t-s}$$
$$(H_1.K:1) = (H_1.K:K)(K:1)$$
$$(H_1.K:1) = P^{t-s}.P^n$$

ولما كانت $K \subseteq H_1.K$ وأن $H_1.K$ هي $P-$ زمرة نجد ان $K = H_1.K$ وهذه يبين أن $H_1 \subseteq K$ ومنه

$$H_1 \subseteq H \cap K$$

وبالتالي

$$H \cap N(K) \subseteq H \cap K$$

ومنه

$$H \cap N(K) = H \cap K$$

٢) ليكن $x \in G$ ولنبرهن أن xKx^{-1} هي $P-$ زمرة جزئية سيلوفية في G لنعرف العلاقة

$$f: K \longrightarrow xKx^{-1}$$
$$\forall k \in K\ ;\ \ f(k) = xKx^{-1}$$

إن f تطبيق ومتباين وغامر وبالتالي فهو تقابل ومنه فإن

$$(K:1) = (xKx^{-1}:1) = P^n$$

وبالتالي xKx^{-1} هي $P-$ زمرة جزئية سيلوفية في G.

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية و K هي $P-$ زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها P^n عندئذ :

١) عدد جميع الزمرة الجزئية المترافقة مع K يساري $(G:N(K))$.

٢) العددان $\left(G:N(K)\right)$ و P اوليان فيما بينهما .

البرهان :

١) لنفرض أن M هي مجموعة الزمر الجزئية في G المترافقة مع K اي

$$M = \{xKx^{-1} \quad : x \in G\}$$

لنفرض ايضاً أن M_L مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $N(K)$ في G لنعرف العلاقة

$$f: M \longrightarrow M_L$$

$$\forall xKx^{-1} \in M \quad ; f(xKx^{-1}) = x.N(K)$$

إن f **تطبيق** لان اذا كان $xKx^{-1}, yKy^{-1} \in M$ بحيث $xKx^{-1} = yKy^{-1}$ فإن

$$y^{-1}xKx^{-1}y = K$$

$$y^{-1}xK(y^{-1}x)^{-1} = K$$

وهذا يبين أن $y^{-1}x \in N(K)$ ولنفرض أن $y^{-1}x = t : t \in N(K)$

ومنه $x = y.t \quad \in y.N(K)$

ومنه $y.N(K) = x.N(K)$ اي أنه $f(xKx^{-1}) = f(yKy^{-1})$

وبالتالي f تطبيق .

لنبرهن أن f **متباين** : لنفرض أن $y.N(K) = x.N(K)$ ومنه $N(K) = y^{-1}x.N(K)$

وهذا يبين أن $y^{-1}x \in N(K)$ ومنه

$$y^{-1}xK(y^{-1}x)^{-1} = K$$

$$y^{-1}xKx^{-1}y = K$$

$$xKx^{-1} = yKy^{-1}$$

وبالتالي هو متباين

وايضا هو **غامر** لأنه $z.N(K) \in M_L$ حيث $z \in G$ فإن $zKz^{-1} \in M$ لنأخذ الصورة المباشرة

$$f(zKz^{-1}) = z.N(K)$$

مما سبق نجد أن

$$card\ M = card\ M_L = \left(G:N(K)\right)$$

٢) لدينا $(K:1) = P^n$ ومنه $(G:1) = m.P^n$ وان m لايقبل القسمة على P وحسب لاغرانج

$$(G:1) = (G:K)(K:1)$$

$$m.P^n = (G:K).P^n$$

ومنه $(G:K) = m$ ولدينا $K \subseteq N(K) \subseteq G$ وأن

$$(G:K) = \left(G:N(K)\right)\left(N(K):K\right)$$

ولما كان $(G:K)$ لا يقبل القسمة على P نجد أن $\left(G:N(K)\right)$ لا يقبل القسمة على P .

ومنه $\left(G:N(K)\right)$ و P أوليان فيما بينهما .

" انتهت المحاضرة "