المحاضرة الرابعة والعشرون

[illegible]

السطوح في الفضاء ثلاثي البُعد:

الشطر البسيط للسطح:

نقول عن مجموعة من نقاط الفضاء ثلاثي البُعد إنها شطرٌ بسيطٌ لسطح إذا وُجِدَ تقابلٌ مستمرٌ بينها وبين مستطيلٍ مغلقٍ في المستوي.

بعبارةٍ أخرى: الشطر البسيط لسطح هو مجموعة نقاط في الفضاء ثلاثي البُعد متجهات مواضعها هي قيَمُ دالةٍ (كل القيم) متجهية القيمة متباينة ومستمرة على مستطيلٍ مغلقٍ أي:

* $F \subseteq \mathbb{R}^3$ شطر بسيط لسطح $\Longleftrightarrow$ وجود دالة $\vec{r} : \Delta = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ متباينة ومستمرة بحيث يكون:

$$\vec{r}(\Delta) = \{ \vec{r}(u^1, u^2) : (u^1, u^2) \in \Delta \}$$
$$= \{ \overrightarrow{OP} : P \in F \}$$
$$:= \overrightarrow{OF}$$

u^2 لا تعني مربع u وإنما 2 دليل علوي لـ u.

تُسمى الدالة $\vec{r}$ تمثيلاً وسيطياً للشطر البسيط F وتُسمى u^1, u^2 وسيطا التمثيل.

كما تُسمى المجموعة $\{ P \mid \overrightarrow{OP} \in \vec{r}(\Delta) \}$ بالمجموعة النقطية للتمثيل $\vec{r}$. وبذلك تكون مجموعةٌ من نقاط الفضاء شطراً بسيطاً لسطح إذا كانت مساويةً للمجموعة النقطية لتمثيلٍ متباينٍ ومستمر على مستطيلٍ مغلق.

مثال: إن بيان دالة حقيقية لمتحولين $f(x,y)$ مستمرة على مستطيل مغلق Δ شطرٌ بسيطٌ لسطح.

الحل:

$$G = Graph\{f\} = \{ (x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \Delta \}$$

$$\vec{r} : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad : \quad \vec{r}(u^1, u^2) = (\underset{x=u^1}{u^1}, \underset{y=u^2}{u^2}, f(u^1, u^2))$$

فرضنا أن

Scanned by CamScanner

/ /

كثير حدود لمتحولين

$\vec r(u^1,u^2) = (x \ldots y$ مستمرة على Δ لأن مركباتها u^1 و u^2 كل منهما كثير حدود لمتحولين فكلاهما مستمر على $\mathbb{R}^2$

وبالتالي هما مستمرات على Δ أما المركبة الثالثة فهي مستمرة على Δ فرضاً.

لنثبت أن الدالة $\vec r$ متباينة

$(u_1^1,u_1^2),(u_2^1,u_2^2)\in\Delta$:

$$\vec r(u_1^1,u_1^2) = \vec r(u_2^1,u_2^2)$$

$$\Rightarrow (u_1^1,u_1^2,f(u_1^1,u_1^2)) = (u_2^1,u_2^2,f(u_2^1,u_2^2))$$

$$\Rightarrow u_1^1 = u_2^1 \quad , \quad u_1^2 = u_2^2$$

$$\Rightarrow (u_1^1,u_1^2) = (u_2^1,u_2^2) \Rightarrow$$ $\vec r$ متباينة

المجموعة النقطية

$$\vec r(\Delta) = \{\vec r(u^1,u^2) : (u^1,u^2)\in\Delta\}$$

المجموعة هي البيانية

$$= \{(u^1,u^2,f(u^1,u^2)) : (u^1,u^2)\in\Delta\}$$

$$= \overrightarrow{OG}$$

$\Leftarrow$ G هي المجموعة النقطية لـ $\vec r$.

* إذا كان $\vec r$ تمثيلاً وسيطياً لسطح بسيط F وكان

$$\vec r(u^1,u^2) = (x(u^1,u^2),\ y(u^1,u^2),\ z(u^1,u^2))$$

فإننا نسمي المعادلات: $x = x(u^1,u^2)$, $y = y(u^1,u^2)$, $z = z(u^1,u^2)$

معادلات وسيطية لـ F .

ملاحظة (1): يمكن القول عن مجموعة نقاط من الفضاء ثلاثي البعد إنها سطح بسيط إذا أمكن الحصول عليها بعملية مط أو ضغط أو حني لمستطيل مغلق دون تمزيق (بذلك لا نخل بشرط الاستمرار) ودون لصق (بذلك لا نخل بشرط التباين).

ملاحظة (2): يمكن أن نستخدم بدلاً من مستطيل مغلق - في التعريف - أي مجموعة جزئية من المستوي مغلقة وبسيطة الترابط وبشكل خاص القرص المغلق

$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow z^2 = 1-(x^2+y^2) \Rightarrow z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ يكون الجذر الموجب لأننا نريد النصف العلوي

مثال: نصف سطح كرة الواحدة العلوي سطح بسيط لسطح لأنه بيان للدالة الحقيقية $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ المستمرة على القرص المغلق $\overline{D}(0,1)$.

مثال: الاسطوانة ليست سطحاً بسيطاً: (لأننا نقوم بلصق طرفي مستطيل)

إذا لم نقم بعملية لصق للمستطيل مستحيل الحصول على اسطوانة

Scanned by CamScanner

اقتطاع مربإزالة شريط من سطح اسطوانة محدودة من الأعلى والأدنى مضلل على شطر بسيط لسطح.

يمكن تغطية سطح الكرة بشطرين بسيطين.

* نقول عن مجموعة مترابطة F من نقاط الفضاء الثلاثي إنها سطح عادي إذا وُجد لكل نقطة p من F جوار $\mathcal{U}$ في F بحيث تكون لصاقته شطراً بسيطاً لسطح.

المقصود هنا بجوار p في F المركبة المترابطة لـ p في تقاطع F مع مجموعة مفتوحة من الفضاء الثلاثي تحوي p. إذاً يوجد لكل نقطة p من سطح عادي جزء من هذا السطح يحوي p ويكون شطراً بسيطاً لسطح.

ملاحظة: إنّ تعريفنا لجوار النقطة p في F يختلف عن التعريف المألوف للجوار في الطبولوجيا النسبية للفضاء الجزئي F. فتعريفنا هنا يعرف على F طبولوجيا تُسمّى الطبولوجيا الأصيلة لـ F. ومع أن هذه الطبولوجيا تتطابق مع الطبولوجيا النسبية في حالات عديدة مثل الكرة والطارة غير أنها مختلفتان في الحالة العامة.

تقاطع F مع هذا الجوار هو جوار

في الطبولوجيا النسبية: يكون جوار لـ p

أما الطبولوجيا الأصيلة نقول: أن $\mathcal{U}$ هو نفط الجوار

الجزء الذي يحوي p ويوجد ترابطية

أمثلة:

أثبت أن العلاقة لتمثيلين منتظمين متكافئين

$$\vec{r_2} : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{r_1} : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r_1} \sim \vec{r_2} \Longleftrightarrow \exists \phi : I_2 \longrightarrow I_1 \text{ مستمرة ومتزايدة}$$

$I_1 \longrightarrow I_2$

$$\vec{r_1}(\phi(\tau)) = \vec{r_2}(\tau) \text{ وغامرة وبحيث}$$

$r_1(t) = r_2(\phi(t))$

$$\phi(I_2) = I_1 \;:\; \phi \text{ غامرة}$$

Alamal

$$\vec{r}_1(\phi(I_2)) = \vec{r}_1(I_1)$$

$\vec{r}_1 \circ \phi$

$$\vec{r}_2(I_2) = \vec{r}_1(I_1)$$

باستخدامنا العز فقط لبيان أن المجموعة النقطية المثال الأول هي نفس المجموعة النقطية للمثال الثاني.

$f(x)=x^2$

بينما الدالة ~~[illegible]~~ دالة ليست ~~[illegible]~~ منتظمة

أما $\vec{r}(t)=(t,t^2)$ دالة منتظمة تماماً لأنّ [illegible] الأولى و[illegible] الثانية