المحاضرة 11

الحركة المستوية للجسم الصلب

تعريفها:

هي حركة جسم صلب بحيث تبقى كل نقطة منه أثناء الحركة واقعة في مستوي واحد يوازي مستوي ثابت في الفراغ

ندعو هذا المستوي الثابت بالمستوي الأساسي للحركة ونرمز له π_1

إن مسارات نقط الجسم في الحركة المستوية هي عبارة عن منحنيات مستوية تقع في مستويات متوازية توازي المستوي الأساسي للحركة.

النظرية الأساسية:

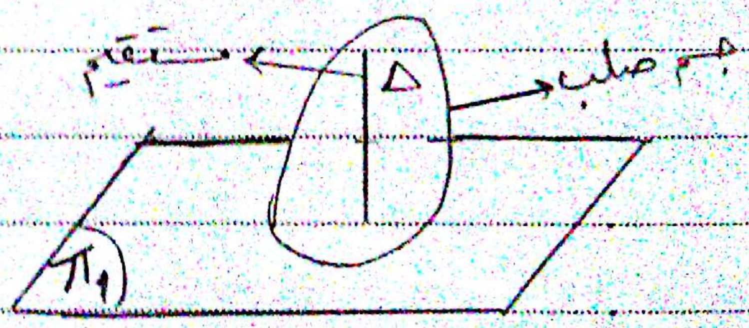
إذا تحرك جسم صلب S بحركة مستوية فإن أي مستقيم متماسك مع الجسم وعامودي على المستوي الأساسي π_1 سوف يتحرك بحركة انسحابية.

البرهان:

ليكن لدينا $\Delta \perp \pi_1$ و $A, B \in \Delta$

بما أن حركة الجسم هي حركة مستوية فإن: $A, B \in S$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = c$ ثابت



- لكون $A \in \Delta$ يوجد مستوي π' يوازي المستوي الأساسي π_1
- ولكون $B \in \Delta$ يوجد مستوي π'' يوازي المستوي الأساسي π_1

ومنه:

$$\pi' \parallel \pi'' \parallel \pi_1$$

ومن الفرض لدينا $\Delta \perp \pi_1 \Leftarrow \overrightarrow{AB} \perp \pi_1$ في لحظة معينة

ولكن:

$A, B \in S \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = c \Rightarrow$ البعد بين π' و π'' ثابت

دوماً $\vec{AB} \perp \pi_1$

$\vec{AB}$ ثابت بالمنحى وثابت بالطول.

$$\Longrightarrow \vec{AB} = \vec{C}$$

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{d(\vec{O_1B} - \vec{O_1A})}{dt} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{O_1B}}{dt} = \frac{d\vec{O_1A}}{dt} \qquad : O' \in \text{الفراغ الثابت}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B) = \vec{v}(A)$$

ومنه الحركة انسحابية.

نتيجة :

لو أخذنا أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي للحركة فإن جميع نقاطه تملك نفس السرع ونفس التسارعات.

فبمعرفة سرعة أي نقطة من المستوي الأساسي π_1 نستطيع معرفة جميع سرع النقاط الواقعة على المستقيم المقام على هذه النقطة والذي يعامد π_1

إذاً :

لدراسة جسم صلب يتحرك بحركة مستوية يكفي دراسة حركة مستوي واحد يقع في المستوي الأساسي للحركة.

إذاً تُعاد الحركة المستوية إلى دراسة حركة نقاط مستوي يقع داخل المستوي الأساسي للحركة.

تعيين درجات حرية الجسم الصلب الذي يتحرك بحركة مستوية :

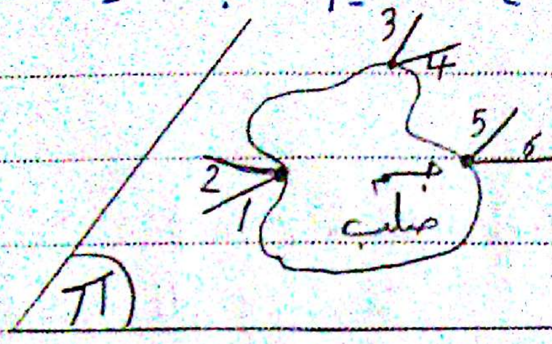
نعلم أن للمستوي المتحرك 3 درجات من الحرية لأنه يتعين إذا علمنا موضع ثلاث نقط منه غير واقعة على استقامة واحدة، ولكل نقطة من وسيطين في المستوي.

وهذه الوسطاء مرتبطة بـ 3 علاقات (البعد)، إذاً عدد الوسطاء المستقلة هي 3، إذاً نحتاج إلى 3 معادلات للحركة

Scanned by CamScanner

إذاً نحتاج إلى قطب للحركة وقطب الحركة يتعين بوسيطين في المستوي x و y وزاوية أو واحدة ولتكن θ وذلك لأن الحركة تتم في مستوي شعاع الدوران فيه محمول على مستقيم Δ العامودي على المستوي الأساسي π_1

إذاً الوسطاء هي $O(x, y)$ والزاوية θ حيث θ هي زاوية الدوران التي يصنعها مستقيم متماسك من المستوي المتحرك مع المستقيم الثابت في المستوي الثابت



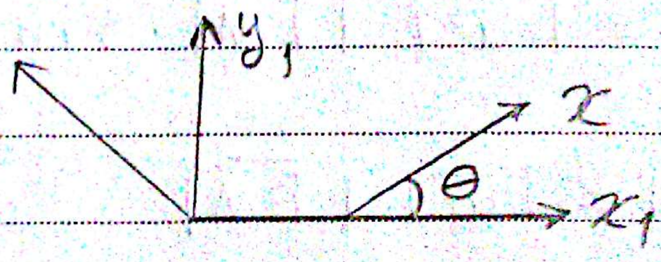
$6-3=3$

مثال:

قضيب OA يتحرك بحركة مستوية

نختار O متحركة على أحد المحاور

وتكون θ هي بين Ox_1 و Ox'



تعيين موضع وسرعة وتسارع أي نقطة من الجسم الصلب:

شعاع الموضع:

$$\forall M \in S: \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$ طالما الديناميك دوران فلدينا دوران حول O

حيث $O(x_0, y_0)$ قطب الحركة (وسيطين)

- متى شعاع الدوران ثابت

هل يتعلق شعاع الدوران بالقطب ؟؟

$\vec{\omega}$ لا يتغير من نقطة لأخرى ولا يتعلق باختيار القطب.

ولا يتغير منحاه فهو يعامد مستوي الحركة أي $\vec{\omega}$ دوماً عامودي على π_1

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

آني

حيث $\vec{V}(O)$ سرعة القطب

$$|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{OM}|$$

Scanned by CamScanner

المركز الآني للدوران نرمز له بـ I :

هو عبارة عن نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها بالنسبة للمستوي الثابت :

$\vec{V}(I) = \vec{0}$ بالنسبة للجملة الثابتة

بفرض I قطب للحركة عندئذ عبارة

$$\forall M \in S : \vec{V}(M) = \vec{V}(I) + \vec{\omega} + \vec{IM}$$

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

فالحركة المستوية هي تتالي لحركات دورانية آنية حول مراكز آنية للدوران.

$$|\vec{V}(M)| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{IM}| \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{V}(M)| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{IM}|$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{V}(M)|}{|\vec{IM}|}$$

$$A \in S \Rightarrow |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{V}(A)|}{|\vec{IA}|}$$

$$B \in S \Rightarrow |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{V}(B)|}{|\vec{IB}|}$$

$$\frac{|\vec{V}(A)|}{|\vec{IA}|} = \frac{|\vec{V}(B)|}{|\vec{IB}|} = \dots = |\vec{\omega}|$$

مبرهنة : إن المركز الآني للدوران وحيد موجب

الإثبات :

بفرض I و I_1 مركزان آنيان للدوران

$\vec{V}(I_1) = \vec{0}$ و $\vec{V}(I) = \vec{0}$

وبما أن I قطب للحركة فإن :

$$\vec{V}(I_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{II_1}$$
$$\vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{II_1}$$

إن $\vec{\omega} \neq \vec{0}$

$$\vec{\omega} \perp \vec{II_1}$$
$$\Longrightarrow \vec{II_1} = \vec{0}$$

I_1 تنطبق على I

تعيين المركز الآني للدوران هندسياً :

نختار نقطتين A و B في مستوي الحركة ونميز الحالات التالية:

① $\vec{V}(A) \not\parallel \vec{V}(B)$

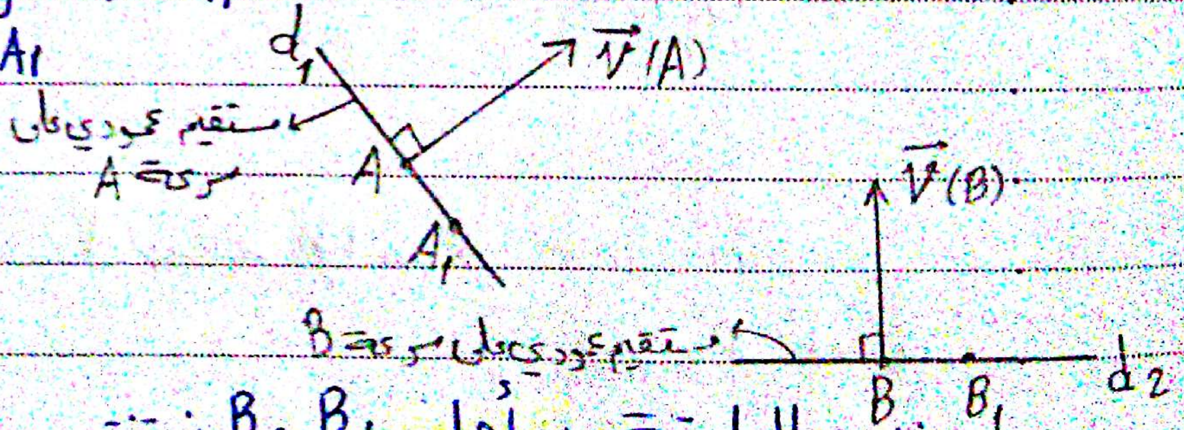
نرسم
$\vec{V}(A) \perp d_1$
$\vec{V}(B) \perp d_2$

ولنأخذ $A_1 \in d_1$ و $B_1 \in d_2$

نطبق نظرية المساقط على A_1 و A و B_1 و B كل واحدة على حدى :

• أولاً نطبق نظرية المساقط على A, A_1

$$\underset{AA_1}{proj}\ \vec{V}(A) = \underset{AA_1}{proj}\ \vec{V}(A_1) = 0$$



$$\Longrightarrow \vec{V}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases}$$

• بنفس الطريقة من أجل B_1 و B نستنتج

$$\vec{V}(B) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_2 \end{cases}$$

وبما أن السرعتين $\vec{V}(B) \not\parallel \vec{V}(A)$

فعندئذ $\Longrightarrow d_1 \not\parallel d_2$

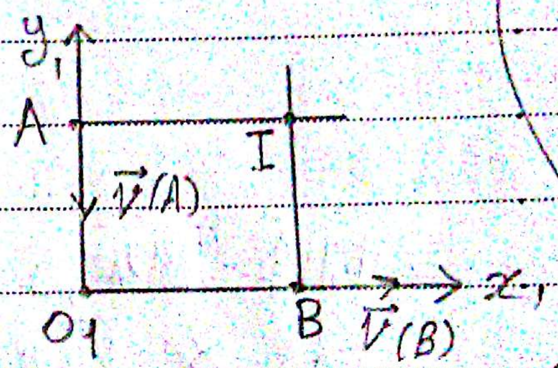
إن d_1 و d_2 متقاطعين في نقطة ولتكن I

$$I \in d_1 \cap d_2$$

Scanned by CamScanner

مثال توضيحي:

ليكن AB مستقيم ينزلق طرفاه في مستوي، السرع هنا غير متوازية لذلك نقيم عمود من نقطة A وتقاطعه مع عمود مقام من B فنتج I مركز آني للدوران



$$I \in d_1 \cap d_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in d_1 & \text{إما} \\ I \in d_2 & \text{أو} \end{cases}$$

$$I \in d_1 \Rightarrow \vec{V}(I) \begin{cases} 0 \\ \perp d_1 \end{cases}$$

$$I \in d_2 \Rightarrow \vec{V}(I) \begin{cases} 0 \\ \perp d_2 \end{cases}$$

ومنه بكلا الحالتين: $\vec{V}(I) = 0$

عندها تكون I مركز آني للدوران ولا يمكن أن يكون $\vec{V}(I)$ عمودي على كل من d_1 و d_2 لكون $(d_1 \cap d_2)$

بالنتيجة في المسائل: إذا كانت سرعة نقطتين غير متوازيتين فإننا نقيم عامودين واحد على A وواحد على B ونقطة تقاطع العامودين هو مركز آني للدوران

انتهت المحاضرة

بيان البشاشي ^_^

Scanned by CamScanner