بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمَّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 30/11/2016

" اختبارات التقارب بالإطلاق "

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة:

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

حيث: a, b ثابتان عقديان ، و: $0 < |a| < |b| < 1$

وإذا كانت المتسلسلة متقاربة ،فاحسب مجموعها.

الحل:

نستخدم معيار دالامبير ولنأخذ متتالية طويلات النسب $\left\{\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right\}$:

$$|a|, \left|\frac{b}{a}\right| , \left|\frac{a^2}{b}\right| = |a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right| , \left|\frac{b^2}{a^2}\right| = \left|\frac{b}{a}\right|^2 , |a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right|^2 , \ldots (*)$$

سوف نأخذ متتاليتين جزئيتين منها:

* بأخذ متتالية الحدود ذو الترتيب الفردي من المتتالية $(*)$ نحصل:

$$|a| , |a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right| , |a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right|^2 , \ldots , |a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right|^n , \ldots$$

وهي متتالية هندسية أساسها $|a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right|$ ، وبما أنَّ: $|a| < |b|$ ، فإنَّ: $\frac{|a|}{|b|} < 1$ ، ومنه يكون:

$$|a| \cdot \left|\frac{a}{b}\right|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه نجد أنَّ الصفر هي نقطة تجمع لِـ $\left\{\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right\}$ وهي أيضاً نهاية المتتالية الجزئية المأخوذة من $(*)$:

$$\Rightarrow \underline{\lim} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 0 \ngtr 1$$

* ولنأخذ المتتالية الجزئية ثانية وهي عبارة عن الأدلة الزوجية من المتتالية $(*)$:

$$\left|\frac{b}{a}\right| , \left|\frac{b}{a}\right|^2 , \ldots , \left|\frac{b}{a}\right|^n , \ldots$$

وهي متتالية هندسية أساسها $\left|\frac{b}{a}\right|$ ، بما أنَّ: $|b| > |a|$ فإنَّ: $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|} > 1$ ، ومنه يكون:

$$\left|\frac{b}{a}\right|^n = \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ومنه نجد أنَّ $+\infty$ نقطة تجمع لِ $\left\{\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right\}$:

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = +\infty \nless 1$$

نلاحظ أنَّ اختبار دالامبير **يفشل** في تحديد طبيعة المتسلسلة.

* لنطبّق معيار كوشي: $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$

$$\sqrt[n]{|z_n|}\ :\ \ 1\,, |a|^{\frac{1}{2}}\,, |b|^{\frac{1}{3}}\,, |a|^{\frac{2}{4}}\,, |b|^{\frac{2}{5}}\,, |a|^{\frac{3}{6}}\,, |b|^{\frac{3}{7}}\,, \dots, |a|^{\frac{1}{2n}} = |a|^{\frac{1}{2}}$$

ولنأخذ متتالية جزئية أولى من الشكل:

$$|a|^{\frac{1}{2}}\,, |a|^{\frac{2}{4}} = |a|^{\frac{1}{2}}\,, |a|^{\frac{3}{6}} = |a|^{\frac{1}{2}}\,, \dots, \overbrace{|a|^{\frac{1}{2}}}^{\text{الحد العام}}\,, \dots$$

متتالية ثابتة وتسعى إلى $|a|^{\frac{1}{2}}$ ومنه $|a|^{\frac{1}{2}}$ نقطة تجمع لِ $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$

ولنأخذ متتالية جزئية أخرى بالشكل:

$$|b|^{\frac{1}{3}}\,, |b|^{\frac{2}{5}}\,, |b|^{\frac{3}{7}}\,, \dots, |b|^{\frac{n}{2n+1}}\,, \dots \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}}\ |b|^{\frac{1}{2}}$$

وهي متتالية تسعى إلى $|b|^{\frac{1}{2}}$ وهي نقطة تجمع لِ $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$

يجب إثبات أنَّ: $l = \underline{\lim} \sqrt[n]{|z_n|} = |a|^{\frac{1}{2}}\ ,\ L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|z_n|} = |b|^{\frac{1}{2}}$

(أي يجب إثبات أنهما نقطتا التجمع الوحيدتين للمتتالية $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$) ... ❀وظيفة ❀.

وعليه فحسب كوشي تكون المتسلسلة متقاربة بالإطلاق ، فهي متقاربة ومن أجل حساب مجموع المتسلسلة نستفيد من تقاربها بالإطلاق فمن الممكن تجميع حدود المتسلسلة لتكتب بالشكل:

$$\underbrace{(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)}_{a \text{ متسلسلة هندسية أساسها}} + \underbrace{(b + b^2 + b^3 + \cdots)}_{b \text{ متسلسلة هندسية أساسها}} = \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-b}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1 - a.b}{(1-a).(1-b)}}$$

ملاحظة(١):

إذا جاء السؤال في الامتحان عن مثال يبين أن معيار كوشي أقوى من معيار دالا أمبير نحل كما حلينا في السابق. أما لو كان السؤال ادرس تقارب وتباعد المتسلسلة فأننا فوراً نطبق معيار كوشي دون استخدام معيار دالامبير.

ملاحظة(٢):

لإثبات أنَّ متسلسلة ما متقاربة شرطياً يكفي إثبات أنَّها ليست متقاربة بإطلاق وبنفس الوقت ليست متباعدة ، أي متقاربة ولكن يجب الانتباه أن اختبارات التقارب بإطلاق لا تنفع في إثبات التقارب وإنما فقط نستخدم اختبارات التقارب.

تمرين ((وظيفة)):

أثبت أنَّ المتسلسلة:

$$1 + a + b^2 + a^3 + b^4 + a^5 + \cdots$$

متقاربة بالإطلاق ، حيث: a, b ثابتان عقديان ، و: $0 < |a| < |b| < 1$ ، ثمَّ احسب مجموعها.

معيار راب:

لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ، عندئذ إذا كانت:

$$L = \overline{\lim}\, n \cdot \left\{ \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| - 1 \right\} < -1$$

فإن $\sum z_n$ ستكون متقاربة بالإطلاق.

" اختبارات التقارب "

تمهيدية:

لتكن $\{A_n\}, \{v_n\}$ متتاليتين عقديتين تحققان:

$$\lim_{n\to\infty} A_n . v_n = A < +\infty$$

عندئذ تكون المتسلسلتان التاليتان من طبيعة واحدة (أي إمَّا متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً)

$$\left(\begin{matrix} A_0 . v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot (A_n - A_{n-1}) \;\; \dots (I) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - v_{n+1}) \cdot A_n \;\; \dots (II) \end{matrix} \right)$$

الإثبات:

نأخذ متتاليتا المجاميع الجزئية لهما:

$$S_n = A_0 v_0 + v_1(A_1 - A_0) + v_2(A_2 - A_1) + \cdots + v_n(A_n - A_{n-1})$$
$$\sigma_{n-1} = (v_0 - v_1)A_0 + (v_1 - v_2)A_1 + \cdots + (v_{n-1} - v_n)A_{n-1}$$
$$\Rightarrow S_n - \sigma_{n-1} = A_n . v_n \xrightarrow[\text{حسب الفرض}]{} A \Rightarrow S_n = \sigma_{n-1} + A_n . v_n$$

ومنه $\{S_n\}$ وَ $\{\sigma_{n-1}\}$ لهما الطبيعة ذاتها ومنه فإنَّ للمتسلسلتان (I) وَ (II) الطبيعة ذاتها ■

أول اختبارات التقارب هو:

✓ اختبار ديدكند ✓

تكون المتسلسلة $\sum a_n \cdot v_n$ متقاربة إذا تحققت الشروط التالية:

(1) لِ $\sum a_n$ متتالية مجاميع جزئية محدودة.

(2) $\sum(v_n - v_{n+1})$ متقاربة بإطلاق.

(3) $v_n \to 0$.

إذا اختل أحد الشروط فإن الاختبار لا يخبرنا بطبيعة المتسلسلة.

الإثبات:

لدينا الشروط الثلاث محققة وسوف نثبت تقارب المتسلسلة $\sum a_n \cdot v_n$ ،

ولتكن $\{A_n\}$ متتالية حدها العام:

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

إن $\{A_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لِ $\sum a_n$ فحسب الشرط **(1)** تكون المتتالية $\{A_n\}$ محدودة ولدينا حسب الشرط **(3)** : $v_n \to 0$ وبالتالي فإن:

$$\overbrace{A_n}^{\text{محدودة}} \cdot \underbrace{v_n}_{\substack{\text{لا متناهي} \\ \text{في الصغر}}} \to 0$$

ومنه وحسب التمهيدية فإن المتسلسلتين التاليتين من طبيعة واحدة:

$$\left(\begin{array}{c} a_0 v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot v_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot v_n \;\ldots (I) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - v_{n+1}) \cdot A_n \;\ldots (II) \end{array}\right)$$

إذاً يكفي لتقارب (I) أن نثبت تقارب (II):

بما أنَّ $\{A_n\}$ محدودة فيوجد عدد M بحيث يكون:

$$\forall\, n \geq 0 \;:\; |A_n| \leq M$$

ولدينا:

$$|(v_n - v_{n-1}) \cdot A_n| = |v_n - v_{n-1}||A_n| \leq M.|v_n - v_{n-1}|$$

إن المتسلسلة: $\sum M \cdot |v_n - v_{n-1}|$ متقاربة لأنَّ: $\sum (v_n - v_{n-1})$ متقاربة بإطلاق وذلك حسب الشرط **(2)**، وحسب اختبار المقارنة فإن: $\sum |(v_n - v_{n-1}) \cdot A_n|$ متقاربة ، ومنه فتكون $\sum (v_n - v_{n-1}) \cdot A_n$ متقاربة بالإطلاق وبالتالي فهي متقاربة أي (II) متقاربة وحسب التمهيدية فإنَّ: (I) متقاربة وبذلك يتم المطلوب .

تمرين ((وظيفة)):

أثبت أنَّ المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

متقاربة شرطياً .

الحل يتم باستخدام معيار ديدكند وذلك بفرض $a_n = i^n$ ، و $v_n = \frac{1}{n}$ ، وهو متروك للطالب ☺

انتهت المحاضرة ..

الرياضيات هي اللغة التي كتبَ الله بها الكون

إعداد: محمد خالد الشعار