Syria Math

التحليل 3

الدكتور : يحيى قطيش

المحاضرة : التاسعة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١٢/١٤

إعداد : نذير تيناوي

في المحاضرة السابقة قمنا بحل تمارين كثيرة عن التكاملات التابعة لوسيط ، سنحل الآن تمرين أخير ثم ننتقل لدراسة متسلسلات فورييه ☺

تمرين(٧): أثبت أن:

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-\alpha^2}$$

الحل:

نشتق التكامل بالنسبة لـ α

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\right)dx$$

$$=+\int_0^{\infty}-e^{-x^2}.2x.\sin 2\alpha x\ dx=H$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض: $u=\sin 2\alpha x\Longrightarrow du=2\alpha\cos 2\alpha x\ dx$

$$dv=-2x^{-x^2}\ dx\Longrightarrow v=e^{-x^2}$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=[u.v]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}v\ du$$

$$=\left[e^{-x^2}.\sin 2\alpha x\right]_0^{\infty}-2\alpha\int_0^{\infty}e^{-x^2}.\cos 2\alpha x\ dx$$

حيث:

$$\left[e^{-x^2}.\sin 2\alpha x\right]_0^{\infty}=0$$

لأنه بالتعويض بـ ∞ نجد أن $e^{-\infty}=0$ وعند التعويض بـ 0 نجد أن $\sin(0)=0$

أي:

$$\left[e^{-\infty}.\sin 2\alpha(\infty)-e^{0}.\sin 0\right]=0$$

ومنه:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -2\alpha \int_0^{\infty} e^{-x^2}.\cos 2\alpha x \;\, dx = -2\alpha I(\alpha)$$

$$\frac{dI}{I} = -2\alpha \, d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln I = -\alpha^2 + \ln c \Rightarrow I = c.e^{-\alpha^2}$$

عندما $\alpha = 0 \Leftarrow I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ومنه حسب $I = c.e^{-\alpha^2}$ نجد أن $\boldsymbol{c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

ولهذا فإن: $\mathbf{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}}$

بهذا نكون قد أنهينا كل ما يخص التكاملات التابعة لوسيط و التمارين المتعلقة بهذا البحث ، و لننتقل إلى بحث جديد :

متسلسلات فوريه

تعريف : كل متسلسلة توابع من الشكل :

$$\boldsymbol{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx)}$$
$$\boldsymbol{= \frac{a_0}{2} + (a_1 cosx + b_1 sinx) + (a_2 cos2x + b_2 sin2x) + .. + (a_n cosnx + b_n sinnx) + \cdots}$$

تسمى متسلسلة فوريه ، حيث $\boldsymbol{a_n, b_n}$ ثوابت بالنسبة لـx لأجل كل $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$

-إن كل حد من حدود هذه المتسلسلة هو تابع دوري و دوره 2π إذ نعلم أن :

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x \quad : k \in Z$$
$$\sin(x + 2\pi k) = sinx \quad : k \in Z$$

و بالتالي :

$$\cos n(x + 2\pi k) = \cos nx \quad : k \in Z$$
$$\sin n(x + 2\pi k) = sinnx \quad : k \in Z$$

-ليكن $f(x)$ تابع المجموع لمتسلسلة فورييه المذكورة أعلاه (في حال تقاربها) ، إن f(x) تابع دوري و دوره 2π.

و لنوجد دساتير لحساب الثوابت a_0, a_n, b_n:

لنفرض أن $f(x)$ تابع مستمر على المجال $]-\pi,\pi[$ و أن :

$$f(x)=\frac{\boldsymbol{a_0}}{\mathbf{2}}+\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(\boldsymbol{a_n cosnx}+\boldsymbol{b_n sinnx}) \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

◄ **حساب** a_0 :

نكامل طرفي المساواة (١) على المجال :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\boldsymbol{a_0}}{\mathbf{2}}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(\boldsymbol{a_n cosnx}+\boldsymbol{b_n sinnx})\right)dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\underbrace{[x]_{-\pi}^{\pi}}_{=2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}cosnx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}sinnx\,dx$$

إلا أنّ:

$$\int_{-\pi}^{\pi}cosnx\,dx=\frac{1}{n}[sinnx]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}(\sin(n\pi)-\sin(-n\pi))=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}sinnx\,dx=\frac{-1}{n}[cosnx]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}(\cos(n\pi)-\cos(-n\pi))=-\frac{1}{n}(0)=0$$

وبالتالي :

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\pi a_0+0+0\Rightarrow\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx}$$

◄ **حساب** a_n : ليكن $m\geq 1$ عدد صحيح : و لنضرب طرفي العلاقة (١) بـ $cosmx$

$$f(x)\,cosmx = \frac{a_0}{2}\boldsymbol{cosmx} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosmx\ cosnx + b_n cosmx\ sinnx)$$

و منه يكون :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\boldsymbol{cosmx}\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ dx}_{=\frac{1}{m}[sinmx]_{-\pi}^{\pi}=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cosnxdx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ sinnxdx\right)$$

إذاً لدينا :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\boldsymbol{cosmx}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cosnxdx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ sinnxdx\right),,(I)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن عبارة عن مجموع متسلسلتين ، لندرس كل منهما على حدة :

#المتسلسلة الأولى:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cosnxdx\right)$$

$$= a_1\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cosxdx + a_2\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cos2xdx + a_3\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cos3xdx$$

$$+\cdots+\underbrace{a_m\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ cosmxdx}_{n=m\ \text{الحد الذي يحقق أن}} + a_{m+1}\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{cosmx}\ \cos(m+1)\,xdx+\cdots \ldots\ldots ..$$

و لنحسب كل تكامل من التكاملات السابقة (باستثناء التكامل الموافق لـ n=m سنناقشه لوحده)):

نعلم أن :

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \quad : n \neq m$$

و بالتالي :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)dx$$
$$= \frac{1}{2(m+n)}[\sin(m+n)x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}[\sin(m-n)x]_{-\pi}^{\pi} = 0 + 0 = 0$$

و عليه فإن جميع حدود المتسلسلة السابقة ستنعدم قيمها باستثناء الحد الذي يحقق أن $n=m$ أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx\right)$$
$$= a_1(0) + a_2(0) + a_3(0) + \cdots + \underbrace{a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx dx}_{n=m \text{ الحد الذي يحقق أن}} + a_{m+1}(0) + \cdots$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx\right) = \underbrace{a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx dx}_{n=m \text{ الحد الذي يحقق أن}} = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx\right) = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx$$
$$= a_n(\pi + 0)$$
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx\right) = a_n\pi} \ldots\ldots (*)$$

#المتسلسلة الثانية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx\right)$$

$$= b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sinx \; + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin2xdx + b_3 \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin3xdx$$

$$+ \cdots + \underbrace{b_m \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx\, sinmx}dx}_{n=m\ \text{الحد الذي يحقق أن}} + b_{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx} \sin(m+1)\, xdx + \cdots \ldots \ldots ..$$

و لنحسب كل تكامل من التكاملات السابقة (باستثناء التكامل الموافق لـ n=m سنناقشه لوحده)):

نعلم أن :

$$cosmx\ sinnx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)\, x + \sin(m-n)\, x) \quad : n \neq m$$

و بالتالي :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin\boldsymbol{nx}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)\, x + \sin(m-n)\, x)dx$$

$$= \frac{-1}{2(m+n)}[\cos(m+n)\, x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{-1}{2m-n)}[\cos(m-n)\, x]_{-\pi}^{\pi} = 0 + 0 + 0$$

و عليه فإن جميع حدود المتسلسلة السابقة ستنعدم قيمها باستثناء الحد الذي يحقق أن $n=m$ أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{b_n}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin\boldsymbol{nx}dx\right)$$

$$= a_1(0) + a_2(0) + a_3(0) + \cdots + \underbrace{a_m \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin\boldsymbol{mx}dx}_{n=m\ \text{الحد الذي يحقق أن}} + a_{m+1}(0) + \cdots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin\boldsymbol{nx}dx\right) = \underbrace{b_m \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx}\, sin\boldsymbol{mx}dx}_{n=m\ \text{الحد الذي يحقق أن}} = b_n \int_{-\pi}^{\pi} cosnx\ sinnxdx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{b_n}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cosmx\ sinnx}dx\right) = \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx\ \ dx = \frac{b_n}{2}\frac{1}{2n}[-cos2nx]_{-\pi}^{\pi} \ = 0$$

لأن : $[-cos2nx]_{-\pi}^{\pi} = -cos2n\pi + \cos(-2n\pi) = -1 + 1 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx\ sinnxdx\right) = 0} \ldots\ldots(**)$$

نعوض$(**)$ &$(*)$ في العلاقة (I):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cosnx\ dx = \pi a_n + 0 \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cosnx\ dx}$$

◄ **حساب b_n** : ليكن $m \geq 1$ عدد صحيح : و لنضرب طرفي العلاقة (١) بـ $sinmx$

فبنفس الأسلوب السابق سنجد أن :

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sinnx\ dx}$$

تدعى الدساتير السابقة في حساب الثوابت بدساتير أولر ☺

نشر الدالة f(x) في متسلسلة فورييه :

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $]-\pi,\pi[$ فإما أن تكون الدالة $f(x)$ مستمرة على كامل المجال $]-\pi,\pi[$ أو يكون للدالة عدد منتهٍ من نقاط الانقطاع داخل المجال .

- سنفرض أن نقاط الانقطاع من النوع الأول ، أي يوجد للدالة في النقطة x_0 النهايتين :

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0+0}}_{\text{قيم أكبر}} f(x)\ ,\ \underbrace{\lim_{x\to x_0-0}}_{\text{قيم أصغر}} f(x)$$

هما موجودتين و لكنهما غير متساويتين

كذلك نفرض أنه يمكن تجزئة المجال إلى مجالات جزئية بحيث تكون الدالة $\boldsymbol{f(x)}$ مطردة داخل كل من هذه المجالات

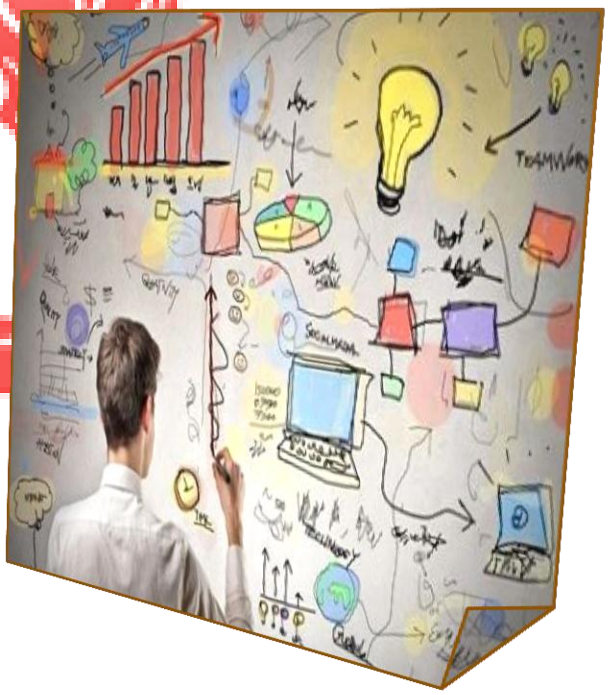
تعريف شروط ديركليه :

نقول عن الدالة $f(x)$ إنها محققة شروط ديركليه في المجال $]-\pi,\pi[$ إذا حققت :

أن الدالة $f(x)$ مستمرة على $]-\pi,\pi[$ أو لها عدد منتهٍ من نقاط الانقطاع من النوع الأول ، لذا يمكن تجزئة المجال إلى عدد منتهٍ من المجالات الجزئية شرط أن تكون الدالة مطردة و نهاية الدالة في طرفي المجال :

$$\lim_{x\to-\pi+0} f(x)=f(-\pi+0)$$
$$\lim_{x\to\pi-0} f(x)=f(\pi-0)$$

و من الممكن أن تكون النهايتين مختلفتين إلا أن مجموع المتسلسلة عند القيمتين $-\pi,\pi$ نفسها كون المتسلسلة متقاربة.



نذير تيناوي