بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 14/11/2016

الفصل الثالث : " المتتاليات والمتسلسلات العقديّة "

المتتالية بشكل عام :

هي تابع منطلقه مجموعة جزئيّة مجموعة الأعداد الكلية: $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ((قد تكون كامل $\mathbb{N} \cup \{0\}$)) ، ومستقرّه مجموعة ما .

المتتالية العقديّة :

هي كل تابع منطلقه مجموعة الأعداد الكلية $\mathbb{N} \cup \{0\}$ أو مجموعة جزئيّة منها ومستقرّه المجموعة $\mathbb{C}$:

$$z : A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$n \longmapsto z(n) = z_n$$

ويدعى z_n بالحد العام للمتتالية ، ويرمز للمتتالية بالشكل : $\{z_n\}_{n\in A}$

أو بالشكل : $\{z_1, z_2, \dots, z_n, ..\}$

وتسمّى A مجموعة أدلّة المتتالية (منطلق المتتالية) ، والترتيب مهم في عناصر المتتالية ، والتكرار فيها مسموح أي لابدَّ من ذكر جميع العناصر حتّى لو كانت مكرّرة.

وإذا كانت A منتهية فإننا نسمي المتتالية متتالية منتهية ، وإلّا فندعوها: متتالية غير منتهية ، أو بشكل عام ندعوها : " متتالية " .

مجموعة قيم المتتالية:

يجب التفريق بين المتتالية ومجموعة قيمها ، حيث مجموعة قيم المتتالية هي المجموعة :

$\{z_n : n \in A\}$ وهنا الترتيب غير مهم والتكرار ممنوع .

مثلاً: المتتالية: $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$\{i, -1, -i, 1, i, -1, \dots\}$$

أما مجموعة قيمها فهي:

$$\{1, -1, i, -i\}$$

ونلاحظ أنَّ: $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية غير منتهية لكن مجموعة قيمها منتهية .

مثال:

بفرض لدينا الحد العام التالي لمتتالية عقديّة:

$$z_n = \frac{n}{n-3}.i + \frac{1}{n}$$

بإمكاننا أن نستنتج من الحد العام أوسع مجموعة تصلح أن تكون منطلقاً لهذه المتتالية وهي:

$$A = \{4,5,6,\dots\}$$

ولم نأخذ الأعداد: $0 \le n \le 3$ لأنَّ العدد $(n = 3)$ غير معرّف على الحد العام ، والآن بامكاننا بسهولة أن نستنتج حدود هذه المتتالية:

$$\{z_n\}_{n\in A} = \left\{\frac{n}{n-3}.i + \frac{1}{n}\right\}_{n\ge 4} = \left\{4i, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}i + \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

متتالية الأجزاء الحقيقيّة ومتتالية الأجزاء التخليّة لمتتالية عقديّة :

لتكن $\{z_n\}$ متتالية عقديّة عندئذٍ يكون: $z_n \in \mathbb{C}$ لأجل كل n ، ومنه يمكن أن نكتب z_n بالشكل :

$$z_n = x_n + i.y_n \;:\; \forall n$$

نسمّي المتتالية الحقيقية $\{x_n\}$ متتالية الأجزاء الحقيقيّة لـ $\{z_n\}$ ، ونرمز لها بـ $\{Re\, z_n\}$.

نسمّي المتتالية الحقيقية $\{y_n\}$ متتالية الأجزاء التخيلية لـ $\{z_n\}$ ، ونرمز لها بـ $\{Im\, z_n\}$.

المتتالية المحدودة:

نقول عن المتتالية العقديّة $\{z_n\}$ إنّها محدودة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث :

$$|z_n| < M \;;\; \forall n$$

وهذا يعرَّف هندسيّاً أنّ $\{z_n\}$ محدودة إذا وفقط إذا وقعت جميع حدودها في القرص $D(0, M)$.

وأيضاً:

إذا كانت متتالية عقديّة محدودة هذا يكافئ أنَّ مجموعة قيم هذه المتتالية محدودة .

مثالان:

$\{i^n\}$ محدودة لأنَّ :

$$|i^n| \le 1 < 2 = M \;;\; \forall n$$

$\left\{\frac{1^n}{n}\right\}$ محدودة لأنَّ :

$$\left|\frac{1^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \le 1 < 2 = M \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

مبرهنة:

لتكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية بحيث : $z_n = x_n + i.y_n$ ، عندئذٍ إنَّ: $\{z_n\}$ محدودة إذا وفقط إذا كانت كل من متتاليتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لها $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ محدودتان ، أي:

$\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ محدودتان $\Leftrightarrow \{z_n = x_n + i.y_n\}$ محدودة.

البرهان:

$(\Rightarrow)$: بفرض $\{z_n\}$ محدودة ومنه (حسب التعريف) يوجد عدد حقيقي M بحيث يكون :

$$|z_n| < M \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

لكن: $|Re\, z| \leq |z|$

لأنَّ :
$$\left(Re\,(z)\right)^2 \leq \left(Re\,(z)\right)^2 + \left(Im\,(z)\right)^2 = |z|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{|Re\,(z)| \leq |z|}$$

وبالمثل نجد أنَّ:
$$\boxed{|Im\,(z)| \leq |z|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_n| \leq |z_n| \leq M \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}\text{محدودة} \\ |y_n| \leq |z_n| \leq M \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{y_n\}\text{محدودة} \end{cases}$$

وبالعكس $(\Leftarrow)$:

بفرض $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ محدودتان ، هذا يعني وجود عددين حقيقيين M_1 و M_2 بحيث:

$$\begin{cases} |x_n| \leq M_1 \;\; ; \;\; \forall n \\ |y_n| \leq M_2 \;\; ; \;\; \forall n \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_n| = |x + iy_n| \leq |x_n| + |iy_n| = |x_n| + 1.|y_n| \leq M_1 + M_2 = M$$

$$\Rightarrow |z_n| < M \;\; ; \;\; \forall n \Rightarrow \{z_n\}\text{محدودة}$$

مثال:

$$\left\{z_n = \frac{1}{n} + i.\frac{n}{n+3}\right\}$$

محدودة لأنَّ :

$$\begin{cases} \{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \Rightarrow |x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < 2 \;\; ; \;\; \forall n \\ \{y_n\} = \left\{\frac{n}{n+3}\right\} \Rightarrow |y_n| = \left|\frac{1}{n+3}\right| < 1 \;\; ; \;\; \forall n \end{cases}$$

مثال ثانٍ:

$$\left\{z_n = \frac{1}{n} + i.\cos n\right\}$$

هي متتالية عقديّة بحيث متتالية الأجزاء الحقيقيّة لها هي $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ، ووجدنا سابقاً أنها محدودة.

ومتتالية الأجزاء التخيليّة لها هي $\{\cos n\}$ وهي محدودة لأنَّ: $|\cos n| \leq 1 < 2 \;;\; \forall n$

وبالتالي نجد أنَّ $\{z_n\}$ محدودة لأن متتالية الأجزاء الحقيقية لها ومتتالية الأجزاء التخيّلية لها محدودتان .

تقارب متتالية عقديّة :

نقول عن متتالية عقدية $\{z_n\}$ إنها متقاربة إلى العدد العقدي a إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,, \exists\, N_\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; |z_n - a| < \varepsilon \;;\; \forall\, n \geq N \ldots (*)$$

و نرمزلتقارب متتالية عقدية $\{z_n\}$ من عدد عقدي a :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = a} \quad \text{أو:} \quad \boxed{\begin{matrix} z_n \longrightarrow a \\ n \longrightarrow \infty \end{matrix}}$$

وهندسياً:

$\{z_n\}$ متقاربة إلى a هذا يعني إنَّ أيَّ جوارلـ a سيحوي كل حدود المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها .

التباعد:

نقول عن متتالية عقديّة $\{z_n\}$ إنّها متباعدة إذا لم نجد عدداً عقدياً a بحيث تكون :

$\lim_{n\to\infty} z_n = a$ ، أي إذا لم تتحقق $(*)$.

خواص المتتالية العقدية المتقاربة:

$$\textbf{1)}\quad |z_n - a| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow z_n \longrightarrow a$$
$$\textbf{2)}\quad z_n \longrightarrow 0 \;\Leftrightarrow\; |z_n| \longrightarrow 0$$
$$\textbf{3)}\quad z_n \longrightarrow a \;\Rightarrow\; |z_n| \longrightarrow a$$

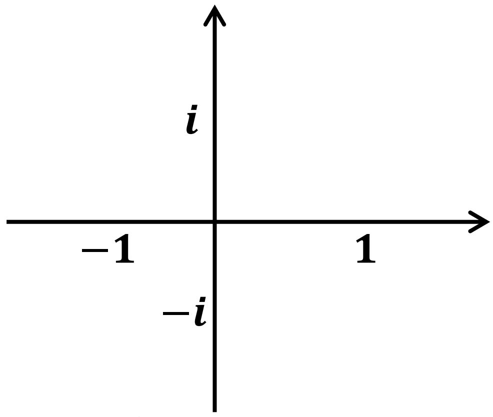
العكس للخاصة الأخيرة غيرصحيح في الحالة العامة ،

فمثلاً :

$$|z_n = i^n| \longrightarrow 1$$

ولكن: $\{i^n\}$ ليست متقاربة ، لأنّه من الواضح أنّه لا يوجد أي عدد عقدي a يحقق أن أي جوارله

سيحوي كل حدود المتتالية باستثناء عددٍ منتهٍ منها.



حيث إنَّ مجموعة قيم هذه المتتالية هي: $\{1, -1, i, -i\}$ وكلًّا منها مساوية لعدد غير منتهٍ من حدود المتتالية ، وبالتالي لا يمكن لأي جوار لأي عدد a أن يحوي جميع حدود المتتالية لأنّه سيحوي فقط الحدود المساوية لإحدى هذه القيم دون باقي الحدود ((الغير المنتهية المساوية للقيم الثلاثة الباقية)).

هذا يعني أنَّ $\{i^n\}$ متباعدة .

نتيجة:

إنَّ أي متتالية متأرجحة أي تتأرجح قيمها بين عدد منتهٍ من القيم بحيث تمرّ على هذه القيم عدد غير منتهٍ من المرّات تكون متباعدة.

مثال:

المتتاليات المتناوبة هي مثال عن متتالية متأرجحة بين قيمتين فمثلاً المتتالية: $\{(-1)^n\}$ متباعدة لأنّها تتأرجح بين قيمتين تمرُّ عليهما بعدد غير منتهٍ من المرّات وهما: $\{1, -1\}$.

مبرهنة:

تكون المتتالية العقديّة $\{z_n = x_n + i.y_n\}$ متقاربة إلى العدد a ، إذا وفقط إذا كانت :

متتاليتا الأجزاء الحقيقية $\{x_n\}$ والتخيّليّة $\{y_n\}$ متقاربتين إلى $Re\ a$ و $Im\ a$ على الترتيب ، أي:

$$\begin{pmatrix} x_n \to Re\ a \\ y_n \to Im\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_n \to a$$

البرهان :

$(\Leftarrow) : z_n \to a$

$$\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ , \exists\ N(\varepsilon)\ ; \forall n \geq N :\ \ |z_n - a| < \varepsilon$$

ونعلم أنَّ :

$$|x_n - Re\ a| = |Re\ z_n - Re\ a| = |Re\ (z_n - a)| \leq |z_n - a| < \varepsilon$$

ومنه :

$$\boxed{x_n \to Re\, a}$$

وبنفس الطريقة :

$$|y_n - Im\, a| = |Im\, z_n - Im\, a| = |Im\,(z_n - a)| \leq |z_n - a| < \varepsilon$$

ومنه :

$$\boxed{y_n \to Im\, a}$$

البرهان العكسي $(\Rightarrow)$ ، بفرض لدينا :

$$\left.\begin{matrix} x_n \to Re\, a = \alpha \\ y_n \to Im\, a = \beta \end{matrix}\right\}$$

تقارب $\{x_n\}$ من α يقتضي تحقق الشرط :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, N_1(\varepsilon)\,; \forall n \geq N_1 \;\;:\;\; |x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

تقارب $\{y_n\}$ من β يقتضي تحقق الشرط :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, N_2(\varepsilon)\,; \forall n \geq N_2 \;\;:\;\; |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, N = max\{N_1, N_2\}\;; \forall n \geq N \;\;:$$

$$|z_n - (\alpha + i.\beta)| = |(x_n - \alpha) + (y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow\;\; |z_n - (\alpha + i.\beta)| = |z_n - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{z_n \to a}\;\blacksquare$$

<u>مثال:</u>

$$\left\{z_n = \frac{1}{n} + i.\frac{2n}{n+3}\right\}$$

متقاربة لأنَّ متتالية الأجزاء الحقيقيّة لها $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة من الصفر ، ومتتالية الأجزاء التخيّليّة لها $\left\{\frac{2n}{n+3}\right\}$ متقاربة من الـ (2) .

<u>مثال ثانٍ:</u>

إنَّ المتتالية:

$$\left\{z_n = n + i.\frac{1}{n}\right\}$$

متباعدة لأنَّ متتالية الأجزاء الحقيقية لها متباعدة: $\{x_n\} = \{n\} \to \infty$.

مثال آخر:

$$\left\{z_n = \frac{(-1)^n}{n} + i.\frac{n}{2n+3}\right\}$$

متقاربة لأنَّ متتالية الأجزاء الحقيقيّة لها $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ متقاربة من الصفر ، ومتتالية الأجزاء التخيّليّة لها $\left\{\frac{n}{2n+3}\right\}$ ، متقاربة من الـ $\left(\frac{1}{2}\right)$.

إنَّ $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ متقاربة من الصفر لأنَّ:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \ \Rightarrow \ \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

مبرهنة:

النهاية لمتتالية عقديّة إن وجدت فإنّها وحيدة (وهي محققة في أيّ فضاء متري) " الاثبات وظيفة " .

" انتهت المحاضرة "

☺ لا تنسونا من صالح دعواتكم ☺

إعداد: خالد الشعار