Syria Math

التحليل العددي1

الدكتورة: رشا بعاج

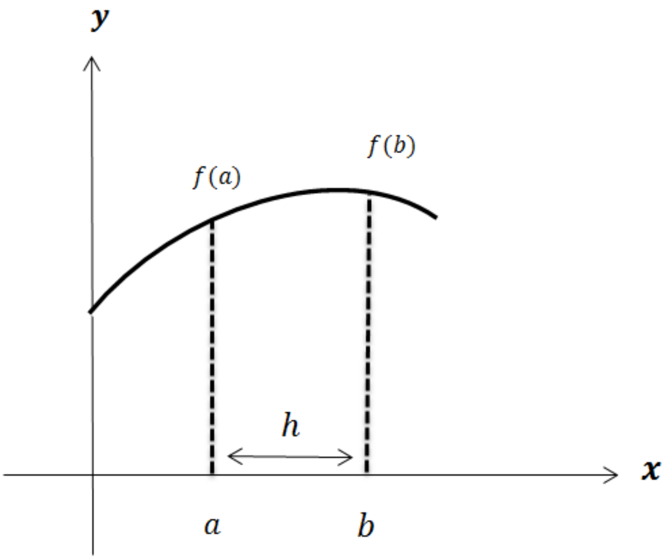
المحاضرة : الثالثة عشر

التاريخ : ٢٠١٦/١١/٢٧

إعداد : محمد فليون && عبد الرحمن البحش

التكامل و التفاضل

مبدأ التكامل العددي :



التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال المغلق [a,b] هو عبارة عن مساحة السطح المحصور بين منحني هذه الدالة و محور الفواصل و المستقيمين x=a,x=b

- **عددياً**: إذا كان لدينا التكامل $\int_a^b f(x).dx$ نستبدل التابع بمتتالية من الدوال نكاملها فنحصل على التكامل بشكل تقريبي

$$\int_a^b f_n(x).dx$$

- أي أنه تقوم معظم الطرائق العددية لحساب التكامل على اختيار متتالية من الدوال $\{f_n(x)\}$ معرفة على المجال $[a,b]$ وقابلة للمكاملة (يتم ذلك غالباً باستخدام الاستيفاء القطعي بكثيرات الحدود) وبحيث تكون متقاربة بانتظام إلى هذه الحدودية عندئذٍ نقوم بحساب التكامل $I(f_n) = \int_a^b f_n(x).dx$ وعوضنا عن حساب التكامل $I(f) = \int_a^b f(x).dx$ ولكن يجب الانتباه إلى إيجاد صيغة الخطأ الأعظمي في كل منها

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx$$

- **طريقة شبه المنحرفات :**

لو أخذنا حدودية لاغرانج التي تستوفي النقطتين

$(x_0 = a, y_0 = f(a)), (x_1 = b, y_1 = f(b))$ فإنه يكون

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = \int_a^b L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 . dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) y_0 . dx + \int_a^b \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) y_1 . dx$$

$$= y_0 \int_a^b \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) dx + y_1 \int_a^b \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) dx$$

نفرض $h = x_1 - x_0$

بما أن x_0 , x_1 تمثل حدود التكامل فنستطيع كتابة :

$$h = b - a$$

$$I = y_0 \frac{h}{2} + y_1 \frac{h}{2}$$

$$= \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(f) \approx \frac{h}{2}(y_0 - y_1)}$$

-

$$f(x) = P_n(x) + E$$

$$E = \int \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f^{(2)}(\xi)$$

فيكونه قانون الخطأ هو :

$$\underbrace{E_I = \left|\frac{h^3}{12} . f^{(2)}(\xi)\right|}_{\text{نستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ الأعظمي}}$$

- **طريقة سمبسون :**

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

حيث : $h = \frac{b-a}{2}$

قانون الخطأ :

$$\underbrace{E_I = \left|\frac{h^5}{90} . f^{(4)}(\xi)\right|}_{\text{يستخدم هذا القانون لإيجاد الخطأ}}$$

… … …

مثال:

احسب التكامل $\int_1^{2.5} e^{x^2} . dx$ بالطريقتين

- **طريقة شبه المنحرف:**

x	$f(x)$
1	2.71828
2.5	518.013

نوجد مقدار الخطوة :

$$h = b - a = 1.5$$

و بالتالي يكون:

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$\approx \frac{1.5}{2}\,(2.71828 + 518.013)$$

$$\approx 390.548$$

- **طريقة سمبسون :**

نحسب الخطوة:

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.75$$

$x_i = a + ih$ حيث $i = 0,1,2$

x	$f(x)$
1	$e = 2.71828$
1.75	21.3809
2.5	518.013

و حسب القانون يكون :

$$I(f) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = 151.564$$

………

تمرين وظيفة :

$\int_2^4 ln\,(1+2x).\,dx$ بالطريقتين مع حساب الخطأ

………

درسنا طريقتي شبه المنحرف و سمبسون لحساب التكاملات العددية إلا أنه لحساب أدق يمكن أن نتبع طريقة شبه المنحرف المركبة أو سمبسون المركبة :

شبه المنحرف المركبة :

$$I(f) \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

حيث n عدد نقاط التقسيم (عدد المجالات)

$$E_I = \left|\frac{h^2(b-a)}{12}.f^{(2)}(\xi)\right|$$

طريقة سمبسون كانت :

$$I(f) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$E_I = \left|\frac{h^5}{90}.f^{(4)}(\xi)\right|$$

- **أما سمبسون المركبة :**

شرط أن n زوجية

(أي إذا كانت n فردية لا نستطيع تطبيق سمبسون المركبة)

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_2 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n]$$

لاحظ أن الأمثال هنا هي 4,2,4,,2,4 أي نبدأ بـ4 و ننهي بـ 4:

$$E_I = \left|\frac{h^4(b-a)}{180}.f^{(4)}(\xi)\right|$$

$$h = \frac{b-a}{\text{n}}$$

مثال :

احسب تكامل $\int_0^2 e^x$ بطريقتين حيث $n = 8$

$$f(x) = e^x$$

$$\int_0^2 e^x$$

- طريقة شبه المنحرف :

i	x	$f(x)$
0	0	1
1	0.25	1.28403
2	0.50	1.64872
3	0.75	2.117
4	1	2.71828
5	1.25	3.49034
6	1.50	4.48169
7	1.75	5.75460
8	2	7.38906

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$$

$$I \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_7 + y_8]$$

$$\approx \frac{0.25}{2}[1 + 2(1.28403) + 2(1.64872) + 2(2.117) + 2(2.71828) + 2(3.49034) + 2(4.48169) + 2(5.75460) + 7.38906]$$

$$\approx 6.4222975$$

$$E_I = \left|\frac{(0.25)^2(2-0)}{12}e^2\right|$$

$$0.07696933$$

طريقة سمبسون :

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_7 + y_8]$$

$$\approx \frac{0.25}{3}[1 + 4(1.28403) + 2(1.64872) + 4(2.117) + 2(2.71828) + 4(3.49034) + 2(4.48169) + 4(5.75460) + 7.38906]$$

$$\approx 6.3891933$$

$$E_I = \frac{(0.25)^4(2-0)}{180}e^2$$

$$= 0.0003207056$$

$$= 0.3207056 \times 10^{-3}$$

… … …

انتهت المحاضرة