بسم الله الرحمن الرحيم

مدرّس المقرّر : د. محمّد الشيخ / تاريخ المحاضرة : 9/11/2016

تمرين تابع للمحاضرة السابعة (وظيفة):

لتكن C دائرة مرسومة على كرة ريمان ، أثبت أنَّ:

أ) إذا كانت C مارة من القطب الشمالي فإنَّ صورتها في المستوي العقدي هو مستقيم.

ب) إذا لم تكن C مارة من القطب الشمالي فإنَّ صورتها في المستوي العقدي هي دائرة في المستوي العقدي وعيّن مركز ونصف قطر الدائرة.

فكرة الحل:

C تتعين بالمعادلتين الديكارتيتين:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 & \text{معادلة كرة ريمان} \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \ldots (*) & \text{معادلة مستوي يقطع الكرة} \end{cases}$$

بعد مركز الإحداثيات عن المستوي أصغر من 1 (وهو نصف القطر) ، حيث :

$$d = \frac{|A.x_0 + B.y_0 + C.z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

حيث d هو بعد نقطة (x_0, y_0, z_0) عن المستوي $(*)$.

ملاحظات على الهامش:

* كلُّ منحنٍ في الفراغ يتعيَّن بمعادلتين.

* أوضاع مستوي مع كرة:

إمّا: لا يقطع بأي نقطة ، **أو:** يقطع بنقطة (ماس للكرة) ، **أو:** يقطع بأكثر من نقطة (دائرة) .

فكرة ثانية للحل:

الدائرة C مارة من القطب الشمالي $\Leftrightarrow$ $N(0,0,1)$ يحقق معادلة المستوي أي يحقق $(*)$

ولتكن $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}$ حيث P تحقق معادلة المستوي وهي النقطة الممثّلة لـ $M(x, y)$ في المستوي العقدي:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \ , \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \ , \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right)+B\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)+C\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)+D=0$$

وبالإصلاح نحصل على معادلة بدلالة x و y وهذه المعادلة في حالة كانت الدائرة تمر من القطب الشمالي ستكون معادلة مستقيم لأنَّ أمثال x^2 و y^2 ستعدم.

المسافة الوترية لعددين عقديين:

نعلم أنَّ المسافة المألوفة بين z_1 و z_2 هي: $|z_1|-|z_2|$ وبناءً عليها كان الفضاء $\mathbb{C}$ هو فضاء متري.

ليكن: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ عددين عقديين وليكن: $P_1(x_1,x_2,x_3)$ و $P_2(y_1,y_2,y_3)$ النقطتين الممثلتين لـ z_1 و z_2 على الترتيب على كرة ريمان ، عندئذٍ نعرّف:

$$d_1(z_1,z_2)=\underbrace{l(P_1,P_2)}_{\text{على الكرة}}$$

وهي طول الوتر الواصل بين P_1 و P_2 وندعوها بالمسافة الوترية .

تمرين:

١) أثبت أنَّ d_1 (المسافة الوترية) تشكّل تابع مسافة على $\mathbb{C}$.

٢) أوجد العلاقة بين المسافة الوتريّة والمسافة المألوفة بين عددين عقديين ، وهل المسافتين متكافئتين؟

الحل:

١) سنبرهن ذلك هندسياً ، أما البرهان التحليلي فيبقى ((وظيفة)) ☺

وضوحاً إنَّ الشروط الثلاثة الأولى للمسافة محققة ، ولنثبت ((متراجحة المثلث)):

ليكن z_1, z_2, z_3 أعداد عقدية وتقابلها على كرة ريمان P_1, P_2, P_3 وكونها واقعة على كرة فهي لا تقع على استقامة واحدة وبالتالي فهي تشكّل مثلّث ، ومنه فإنَّ متراجحة المثلّث محققة لتحقق الخاصة:

((مجموع أي ضلعين في مثلّث أكبر من الضلع الثالثة))

٢) أيضاً هو ((وظيفة)) ولكنّا سنحل القسم الأوّل منه وهو المتعلّق بإيجاد العلاقة بين المسافة الوتريّة والمسافة المألوفة:

نعلم أنَّ المسافة المألوفة بين z بين z' على $\mathbb{C}$ هي :

$$d(z,z')=|z-z'|$$

بينما المسافة الوتريّة هي : $d_1(z,z')=l([P,P'])$

حيث : P,P' هما الممثّلتان لـ z,z' على كرة ريمان على الترتيب .

المطلوب إيجاد العلاقة بين d_1 و d حيث : $z,z' \in \mathbb{C}$

$$d^2(z,z') = l^2[(P,P')] = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2$$

حيث: $P(x_1,x_2,x_3)$, $P'(x_1',x_2',x_3')$

$$d^2(z,z') = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left({x_1'}^2, {x_2'}^2, {x_3'}^2\right) - 2(x_1.x_1' + x_2.x_2' + x_3.x_3')$$

P و P' من الكرة $\Leftarrow$

$$d^2(z,z') = 1 + 1 - 2(x_1.x_1' + x_2.x_2' + x_3.x_3')$$

تحوّل الاحداثيّات الكرويّة السابقة إلى الاحداثيّات الديكارتيّة :

$$d^2 = 2 - 2\left(\frac{4x.x'}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} + \frac{4y.y'}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} + \frac{(|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right)$$

$$= 2 - 2\left(\frac{|z|^2.|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1 + 4(x.x' + y.y')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{|z|^2.|z'|^2 + |z'|^2 + |z|^2 + 1 - |z|^2.|z'|^2 + |z|^2 + |z'|^2 - 1 - 4(x.x' + y.y')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2|z|^2 + 2|z'|^2 - 4(x.x' + y.y')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right)$$

$$= 4\left(\frac{|z|^2 + |z'|^2 - 2(x.x' + y.y')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right) \dots (*)$$

نلاحظ أنَّ :

$$2(x.x' + y.y') = 2Re\,(z.\bar{z}) = z.\overline{z'} + \bar{z}.z'$$

$$d^2(z,z') = |z - z'|^2 = (z - z')\overline{(z - z')} = z.\bar{z} + z'.\overline{z'} - z.\overline{z'} - z'.\bar{z}$$

$$= z.\bar{z} + z'.\overline{z'} - z.\overline{z'} = |z|^2 + |z'|^2 - 2(x.x' + y.y')$$

$$\Rightarrow d_1^2(z,z') = \frac{4\,d^2(z,z')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1(z,z') = \frac{2\,d(z,z')}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}}$$

أما بالنسبة للقسم الثاني من السؤال فجدير بالذكر أن نذكّر بالمسافات المتكافئة:

لتكن d_1,d_2 مسافتان معرّفتان على X ، عندئذٍ نقول عن d_1,d_2 إنهما متكافئتان إذا وفقط إذا:

وجد عددين حقيقيين β, α بحيث يكون:

$$\alpha . d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta . d_1(x,y)$$

بعبارة أخرى: " تكافؤ المسافات يعني أنهما يعرّفان الفضاء المتري نفسه " .

وبالعودة لمثالنا بسهولة يمكن أن نثبت تكافؤ المسافتين من العلاقة التي استنتجناها بينهما .

المركبات لفضاء متري:

ليكن X فضاءً متريّاً ، نقول عن مجموعة D محتواة في X إنها مركبة لـ X إذا وفقط إذا تحقق:

1 D مترابطة.

2 لا يوجد مجموعة مترابطة وتحوي D ولا تساويها.

أو باختصار يمكن أن نقول: " D مترابطة وأعظمية في X " .

مثال (١) :

إذا كان X فضاء متري مترابط فإنَّ المركّبة الوحيدة له هي الفضاء X ذاته .

نتيجة:

الفضاء $\mathbb{C}$ له مركّبة وحيدة هي الفضاء $\mathbb{C}$ نفسه لأنّه فضاء متري مترابط.

مثال (٢) :

لتكن: $X = \overline{D}(0,1) \cup D(3,1)$

نزوّدها بمقصور المترك على $\mathbb{C}$ ، فتصبح فضاء متري غير مترابط ، لأنَّ $D(3,1)$ هي مجموعة مفتوحة في X ، لأنّنا نستطيع كتابتها على الشكل :

$$B = \underbrace{D(3,1)}_{\text{مفتوحة}} \cap X = D(3,1) \quad \text{مفتوحة في } X$$

وإنَّ $\overline{D}(0,1)$ مفتوحة في X أيضاً ، لأنَّ :

$$A = \overline{D}(0,1) = \underbrace{D(0,1.5)}_{\text{مفتوحة}} \cap X$$

إنَّ $\overline{D}(0,1)$ و $D(3,1)$ منفصلتين حيث نلاحظ وضوحاً أنَّ :

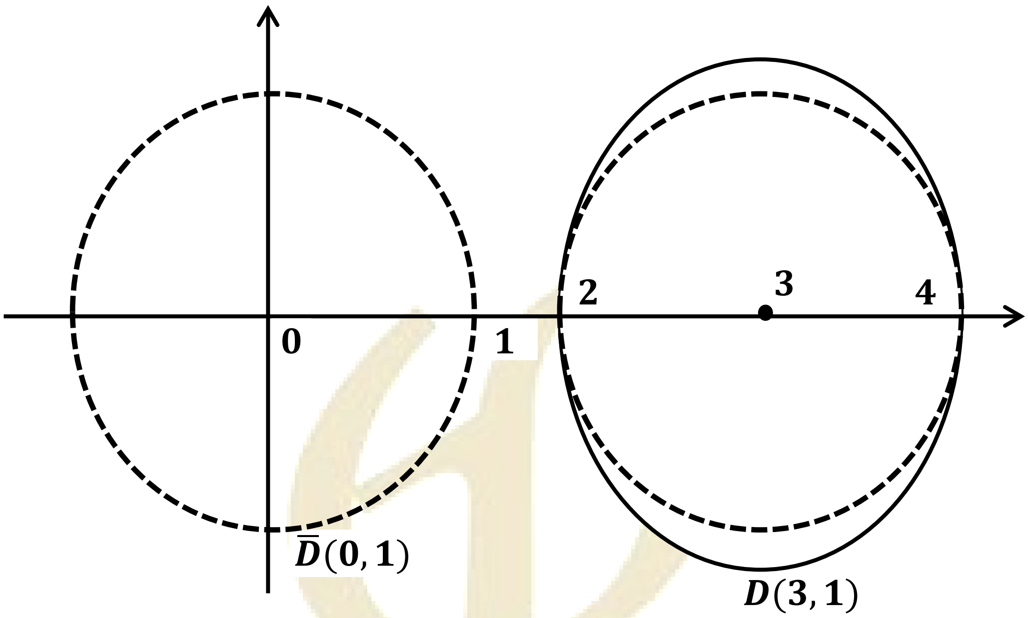
$$A \cup B = X \ , \ A \cap B = \phi$$
$$\bar{A} \cap B = D(0,1) \cap D(3,1) = \phi$$
و: $$A \cap \bar{B} = \overline{D}(0,1) \cap \overline{D}(3,1) = \phi$$

إنَّ A و B هما المركبتان الوحيدتان لـ X ، يجب إثبات أنَّ:

1 A مترابطة و B مترابطة.

2 لا يوجد مجموعة مترابطة في هذا الفضاء تحوي A أو B تماماً.

وهذا واضح من الرسم ، إذاً هما المركبان الوحيدتان، الإثبات التحليلي **((وظيفة)).**



ملاحظة :

المجموعة المفتوحة في الفضاء الجزئي هي عبارة عن مجموعة مفتوحة بالفضاء الكلّي تقاطع الفضاء الجزئي .

خواص المركبات:

١) مجموعة مركّبات فضاء متري تشكّل تجزئة لهذا الفضاء .

٢) مركبات فضاء متري هي مجموعات مغلقة في ذلك الفضاء .

٣) إذا كانت A مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ، فإنَّ جماعة مركّباتها ستكون قابلة للعد .

٤) إذا كانت A مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ، فإنَّ مركبات A هي مجموعات مفتوحة في $\mathbb{C}$.

تذكرة ((التجزئة لفضاء أو لمجموعة)):

هي جماعة اجتماع عناصرها يساوي الفضاء (المجموعة) ومنفصلة مثنى مثنى.

☺ انتهت المحاضرة & تمَّ الفصل الثاني من المقرر ☺

إعداد: خالد الشعار & روان الآغا