أسئلة دورات الإحصاء و الاحتمالات

Syria Math Team

مجموعة السنة الأولى : طلاب كلية العلوم قسم الرياضيات ٢٠١٧

مجموعة السنة الثانية : Improve our Mathematics

صفحتنا على فيس بوك : IOM

الرابط /facebook.com/MathemagicTeam

حل الدورة الثانية ٢٠١٦

السؤال الأول :

١- ليكن A,B حدثين مستقلين متعلقين بتجربة واحدة و المطلوب : أثبت أن $\bar{A}$ و B مستقلان أيضاً

الحل: لنلاحظ أن:

$$P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$$

لكن $P_B(A) = P(A)$ لأن A,B: مستقلان فرضاً ، نعوض

$$P(A) + P_B(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P_B(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P(A)}$$

$$\Rightarrow P_B(\bar{A}) = P(\bar{A})$$

و هذا يعني أن $\bar{A}$ و B مستقلان

١- عرف استقلال ثلاث أحداث عشوائية

ليكن A,B,C ثلاث أحداث عشوائية متعلقة بتجربة واحدة ، نقول عن هذه الأحداث إنها مستقلة احتمالياً إذا تحقق الشرطان:

- A,B,C مستقلة مثنى مثنى
- $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

٢- **حل المسألة التالية:** اخترنا كرتين من صندوق يحوي ست كرات متجانسة اثنتان منهما بيضاء و اثنتان حمراء و اثنتان زرقاء و المطلوب: احسب احتمال أن تكون الكرتان المختارتان من لونين مختلفين

ليكن A: الحدث الدال على كون الكرتين من لونين مختلفين عندئذٍ:

$$P(A) = \frac{C_2^1.C_2^1 + C_2^1.C_2^1 + C_2^1.C_2^1}{C_6^2} = \frac{3}{\left(\frac{6!}{2!\,.\,4!}\right)} = \frac{1}{5}$$

٣- **حل المسألة التالية:** في مجتمع من البالغين تبلغ نسبة الإصابة بالسكري 10% و احتمال أن يقرر طبيب معين إصابة شخص بهذا المرض علماً أنه مصاب بالفعل يساوي 96% و احتمال أن يقرر إصابته علماً أنه غير مصاب يساوي 4% ، تم اختيار أحد الأشخاص البالغين من المجتمع عشوائياً:

أ) احسب احتمال أن يقرر الطبيب أن الشخص مصاب بمرض السكري

ب) إذا علمت أن الشخص المختار مريضاً فما احتمال أن يكون الطبيب قد أنبأه بذلك

الحل:

لنرمز بـ H_1 لكون الشخص غير مصاباً بالسكري ، و بـ H_2 لكون الشخص مصاباً بالسكري عندئذٍ نلاحظ أنّ الأحداث H_1, H_2 تشكل تجزئة ذلك لأن:

$H_1 \cap H_2 = \phi$ و $H_1 \cup H_2 = \Omega$

و لدينا فرضاً:

$$P(H_1)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}\quad \& \quad P(H_2)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$$

أ) ليكن A الحدث الدال على أن يقرر الطبيب أن الشخص المختار مصاباً بالسكري عندئذٍ و حسب قانون الاحتمال الكلي يكون :

$$P(A)=P(H_1).P_{H_1}(A)+P(H_2).P_{H_2}(A)$$

و لدينا فرضاً:

$$P_{H_1}(A)=\frac{96}{100}\quad \& \quad P_{H_2}(A)=\frac{4}{100}$$

نعوض :

$$P(A)=\frac{1}{10}.\frac{96}{100}+\frac{9}{10}.\frac{4}{100}=\frac{132}{1000}$$

ب) نلاحظ أن المطلوب حساب $P_{H_1}(A)$ و هو $P_{H_1}(A)=\frac{96}{100}$

السؤال الثاني: لتكن التجربة رمي حجري نرد متوازنين و لنرمز بـ X للمتحول العشوائي الدال على مجموع الوجهين الظاهرين و المطلوب :

١) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X

٢) أوجد دالة التوزيع المتجمع $F(x)$

٣) احسب كلاً من التوقع الرياضي و الانحراف المعياري و التباين لـ X

الحل:

١) إن فضاء العينة لهذه التجربة هو:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

و جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

٢) إيجاد دالة التوزيع المتجمع $F_X(x)$ و هي معرفة بالشكل :

$$F_X(t)=\sum_{x<t} f_X(x)=P(X<t)\ ,\forall t\in R$$

من أجل $t\le 2$ يكون : $F_X(t)=0$

من أجل $2 < t \le 3$ يكون : $F_X(t) = f(2) = \frac{1}{36}$

من أجل $3 < t \le 4$ يكون : $F_X(t) = f(2) + f(3) = \frac{3}{36}$

من أجل $4 < t \le 5$ يكون : $F_X(t) = f(2) + f(3) + f(4) = \frac{6}{36}$

من أجل $5 < t \le 6$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{5} f(k) = \frac{10}{36}$

من أجل $6 < t \le 7$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{6} f(k) = \frac{15}{36}$

من أجل $7 < t \le 8$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{7} f(k) = \frac{21}{36}$

من أجل $8 < t \le 9$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{8} f(k) = \frac{26}{36}$

من أجل $9 < t \le 10$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{9} f(k) = \frac{30}{36}$

من أجل $10 < t \le 11$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{10} f(k) = \frac{33}{36}$

من أجل $11 < t \le 12$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{11} f(k) = \frac{35}{36}$

من أجل $t > 12$ يكون : $F_X(t) = \sum_{k=2}^{12} f(k) = \frac{36}{36} = 1$

٣) التوقع الرياضي :

$$E(X) = \sum_{x \epsilon R_X} x f(x)$$

$$= \frac{2.1 + 3.2 + 4.3 + 5.4 + 6.5 + 7.6 + 8.5 + 9.4 + 10.3 + 11.2 + 12.1}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = 7}$$

التباين:

$$Var(x) = \sum_{x \epsilon R_X} \left(x - E(x)\right)^2 f(x)$$

$$= \sum_{x \epsilon R_X} (x-7)^2 f(x)$$

$$= (2-7)^2 \frac{1}{36} + (3-7)^2 . \frac{2}{36} + (4-7)^2 . \frac{3}{36} + (5-7)^2 . \frac{4}{36} + (6-7)^2 . \frac{5}{36} + (7-7)^2 . \frac{6}{36}$$
$$+ (8-7)^2 . \frac{5}{36} + (9-7)^2 . \frac{4}{36} + (10-7)^2 . \frac{3}{36} + (11-7)^2 . \frac{2}{36}$$
$$+ (12-7)^2 . \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X) = \frac{210}{36}}$$

و الانحراف المعياري :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{210}}{6}}$$

السؤال الثالث: بفرض X متحول عشوائي كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & : 0 < x < 3 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١) عين قيمة الثابت c

٢) عين دالة التوزيع $F(x)$

٣)احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X

٤)احسب احتمال $P(0 < X < 1)$

٥) إذا كان $Y = 8X^3$ عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y

الحل:

١) بما أن الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية فهي تحقق أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{3} cx^2 dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{cx^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{9}}$$

٢) إن دالة التوزيع هي الدالة المعرفة بالشكل:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

من أجل $t \leq 0$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} 0dx = 0$$

من أجل $0 < t < 3$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} \frac{x^2}{9} dx = \frac{t^3}{27}$$

من أجل $t \geq 3$

$$F(t) = 1$$

$$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} 0 : t \leq 0 \\ \frac{t^3}{27} : 0 < t < 3 \\ 1 \quad : t \geq 3 \end{cases}$$

٣) حساب التوقع الرياضي :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{3} \frac{x^3}{9} dx = \left[\frac{x^4}{4.9}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

٤)

$$P(0 < X < 1) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \frac{1}{27}$$

٥) نعلم أن :

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

لدينا

$$y = 8x^3 \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y}}{2} = g^{-1}(y)$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$$

و أخيراً عندما $x = 0$ تكون $y = 0$ و عندما $x = 3$ تكون $y = 216$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)^2}{9}\left(\dfrac{1}{6\sqrt[3]{y^2}}\right) & : \ 0 < y < 216 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{216}\right) & : \ 0 < y < 216 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

السؤال الرابع: **أولاً:** بفرض (X,Y) متجه عشوائي كثافته الاحتمالية :

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & : 0 < x,y < 1 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

١) عين قيمة الثابت c

٢) أوجد الكثافة الهامشية لكل من X,Y

الحل:

بما أن f دالة كثافة فهي تحقق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,dxdy = 1$$

$$\Leftrightarrow c\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_{x=0}^{x=1} dy = 1$$

$$\Leftrightarrow c\int_0^1 (\frac{1}{2} + y)\,dy = 1 \Rightarrow c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

بالتالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) & : 0 < x,y < 1 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تعيين الكثافة الهامشية لـ X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

عندما $0 < x < 1$.

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2}$$

بالتالي :

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تعيين الكثافة الهامشية لـ Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

عندما $0 < x < 1$.

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)dx = y + \frac{1}{2}$$

بالتالي :

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & : 0 < y < 1 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ثانياً:

إذا كان X,Y متحولين عشوائيين منقطعين لهما جدول التوزيع المشترك:

$X\backslash Y$	2	3
0	0.24	0.16
1	0.06	0.54

١) أوجد التوزيع الهامشي لكل من X,Y

٢) هل X,Y مستقلان احتمالياً

<u>الحل:</u>

أولاً لنوجد دالة الاحتمال الهامشية لكل من المتحولين :

X	0	1	Σ
$f_x(x)$	$0.24 + 0.16 = 0.4$	$0.06 + 0.54 = 0.6$	1

Y	2	3	Σ
$f_x(x)$	$0.24 + 0.6 = 0.3$	$0.16 + 0.54 = 0.7$	1

الآن نوجد دالة التوزيع لكل من المتحولين كما يلي :

$$F_X(x) = \sum_{t<x} f_X(t)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 0.4 & : 0 < x \leq 1 \\ 0.4 + 0.6 = 1 & : x > 1 \end{cases}$$

بشكل مماثل :

$$F_Y(y) = \sum_{t<y} f_y(t)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & : y \leq 2 \\ 0.3 & : 2 < y \leq 3 \\ 0.3 + 0.7 = 1 & : y > 3 \end{cases}$$

لمعرفة فيما إذا كانا مستقلان ، نشكل الجدول :

x	y	$f(x,y)$	$\mathrm{f_x}(x)$	$f_y(y)$	$\mathrm{f_x}(x).f_y(y)$
0	2	0.24	0.4	0.3	0.12
0	3	0.16	0.4	0.7	0.28
1	2	0.06	0.6	0.3	0.18
1	3	0.54	0.6	0.7	0.42

نلاحظ أن :

$$\mathrm{f_x}(x).f_y(y) \neq f(x,y)$$

فهمان غير مستقلين احتمالياً

.....انتهى الحل.....

حل الدورة التكميلية ٢٠١٦

لسؤال الأول :

(١) عرف دالة الاحتمال (التعريف البديهي)

(٢) ليكن A,B حدثين من فضاء احتمالي و المطلوب أثبت أن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(٣) حل المسألة التالية : اخترنا عشوائياً 6 زجاجات عصير من صندوق يحوي 12 زجاجة منها 6 غير صالحة و المطلوب : احسب احتمال سحب زجاجتين غير صالحتين على الأقل

(٤) حل المسألة التالية :احتمال أن يشترك المقاول I في مناقصة لبناء مدرسة هو $\frac{2}{3}$. اشترك المقاول II في المناقصة و احتمال أن يفوز بالعقد في غياب المقاول I يساوي $\frac{1}{3}$ و احتمال أن يفوز بالعقد عند اشتراك المقاول I يساوي $\frac{1}{5}$ و المطلوب : أ) احسب احتمال أن يفوز المقاول II بالمناقصة . ب) إذا علمت أن المقاول II قد فاز ، فما احتمال أن لا يكون المقاول I قد اشترك بالمناقصة ؟

الحل:

(١) ليكن Ω فضاء الإمكانات لتجربة عشوائية و $\mathcal{A}$ جبراً تاماً على Ω ، عندئذٍ ندعو الدالة :

$$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

دالة احتمال إذا و فقط إذا تحققت الخصائص التالية :

- بديهية (١) : $\forall A \in \mathcal{A} ; P(A) \geq 0$
- بديهية (٢) : $P(\Omega) = 1$
- بديهية (٣) : إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ متتالية قابلة للعد أو منتهية من الأحداث المتنافية مثنى مثنى من عناصر $\mathcal{A}$ عندئذٍ:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

(٢) لدينا : $A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$ و الحدثان $A \,\&\, [B - (A \cap B)]$ متنافيان و عليه يكون:

$$\begin{aligned} PA \cup B &= P(A \cup [B - (A \cap B)]) \\ &= P(A) + P\big(B - (A \cap B)\big) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

(٣) ليكن A الحدث الدال على ظهور زجاجتين غير صالحتين على الأقل

إن عدد الحالات الكلية :

$$C(12,6) = \frac{12!}{6!.6!} = 924$$

و عدد الحالات الملائمة لوقوع A :

$$C(6,2) + C(6,3) + C(6,4) + C(6,5) + C(6,6) = 57$$

$$P(A) = \frac{57}{924}$$

(٤) ليكن H_1 الحدث الدال على اشتراك المقاول I عندئذٍ $P(H_1) = \frac{2}{3}$

و H_2 الحدث الدال على عدم اشتراك المقاول I عندئذٍ $P(H_2) = \frac{1}{3}$

و A الحدث الدال على ربح المقاول II بالمناقصة

فنلاحظ أن الحدثين H_1, H_2 يشكلان تجزئة حيث أن $H_1 \cap H_2 = \phi$ و $H_1 \cup H_2 = \Omega$ و أيضاً $P(H_1) + P(H_2) = 1 = P(\Omega)$

من الفرض لدينا :

$$P_{H_1}(A) = \frac{1}{5} \quad , P_{H_2}(A) = \frac{1}{3}$$

عندئذٍ : لحساب احتمال فوز المقاول II نطبق دستور الاحتمال الكلي :

$$P(A) = P(H_1).P_{H_1}(A) + P(H_2).P_{H_2}(A) = \frac{2}{3}.\frac{1}{5} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{11}{45}$$

و لحساب احتمال ألا يكون المقاول I قد اشترك علماً أن II قد فاز ، نطبق دستور بايز :

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2).P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{45}} = \frac{5}{11}$$

السؤال الثاني : حل المسألة التالية:

ست بطاقات تحمل الأرقام 0,1,2,3,4,5 نسحب ثلاث بطاقات منها بشكل عشوائي و نرمز بـ X للمتحول العشوائي الدال على مجموع الأرقام المسحوبة **المطلوب** : (١) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X

(٢) أوجد دالة التوزيع المتجمع $F(x)$

(٣) احسب التوقع الرياضي X

الحل :

(١) لدينا مجموعة قيم X هي :

$$R_X = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

كما أن عدد الحالات الممكنة $C(6,3) = 20$

و لنحسب $x_i \in R_X$: $f(x_i)$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{1}{20} \qquad f(4) = P(X=4) = \frac{1}{20}$$

$$f(5) = P(X=5) = \frac{2}{20} \qquad f(6) = P(X=6) = \frac{4}{20}$$

$$f(7) = P(X=7) = \frac{3}{20} \qquad f(8) = P(X=8) = \frac{3}{20}$$

$$f(9) = P(X = 9) = \frac{2}{20} \qquad f(10) = P(X = 10) = \frac{2}{20}$$
$$f(11) = P(X = 11) = \frac{1}{20} \quad f(12) = P(X = 12) = \frac{1}{20}$$

و عليه جدول التوزيع الاحتمالي :

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
$f(x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

(٢) إيجاد دالة التوزيع المتجمع $F(x)$ و هي معرفة بالشكل :

$$\forall x \in R \,, \qquad F(x) = \sum_{t<x} f(t) = P(X < x)$$

من أجل $x \leq 3$: $F(x) = 0$

من أجل $3 < x \leq 4$: $F(x) = f(3) = \frac{1}{20}$

من أجل $4 < x \leq 5$: $F(x) = f(3) + f(4) = \frac{2}{20}$

من أجل $5 < x \leq 6$: $F(x) = f(3) + f(4) + f(5) = \frac{4}{20}$

من أجل $6 < x \leq 7$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=6} f(t) = \frac{8}{20}$

من أجل $7 < x \leq 8$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=7} f(t) = \frac{11}{20}$

من أجل $8 < x \leq 9$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=8} f(t) = \frac{14}{20}$

من أجل $9 < x \leq 10$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=9} f(t) = \frac{16}{20}$

من أجل $10 < x \leq 11$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=10} f(t) = \frac{18}{20}$

من أجل $11 < x \leq 12$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=11} f(t) = \frac{19}{20}$

من أجل $x > 12$: $F(x) = \sum_{t=3}^{t=12} f(t) = 1$

إذن :

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{20} & : x \le 3 \\ \frac{1}{10} & : 4 < x \le 5 \\ \frac{1}{5} & : 5 < x \le 6 \\ \frac{4}{5} & : 6 < x \le 7 \\ \frac{11}{20} & : 7 < x \le 8 \\ \frac{7}{10} & : 8 < x \le 9 \\ \frac{4}{5} & : 9 < x \le 10 \\ \frac{9}{10} & : 10 < x \le 11 \\ \frac{19}{20} & : 11 < x \le 12 \\ 1 & : x > 12 \end{cases}$$

(٣) نعلم أن التوقع الرياضي يعطى بالشكل :

$$E(X)=\sum_{x\in R_X} xf(x)=\frac{147}{20}$$

السؤال الثالث :

بفرض X متحول عشوائي كثافته الاحتمالية:

$$f(x)=\begin{cases} c(x+1) : 0 < x < 2 \\ 0 : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب: (١) عين قيمة الثابت c . (٢) عين دالة التوزيع $F(x)$. (٣) احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X . (٤) احسب احتمال $P(0<X<1)$. (٥) إذا كان $Y=X^3$ عين دالة الكثافة

الحل:

(١) بما أن $f(x)$ كثافة احتمالية فهي تحقق الشرط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_0^2 c(x+1)\,dx=1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2=1 \Rightarrow c(2+2)=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{4}}$$

و عليه يكون:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+1): 0<x<2\\ 0: \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

(٢) بالتعريف ، إن دالة التوزيع $F(x)$ للمتحول العشوائي X و الذي له كثافة احتمالية هي $f(x)$ تعطى بالشكل :

$$\forall x\in\mathbb{R};\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

من أجل $x\le 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$$

من أجل $0<x<2$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}(t+1)\,dt=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)=\frac{x}{8}(x+2)$$

من أجل $x\ge 2$:

$$F(x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}(t+1)\,dt+\int_{2}^{x} 0dt=1$$

إذن :

$$F(x)=\begin{cases}0\ : x\le 0\\ \frac{x}{8}(x+2): 0<x<2\\ 1: x\ge 2\end{cases}$$

(٣) التوقع الرياضي يعطى بالشكل :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}(x^2+x)dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\boxed{\frac{14}{12}}$$

(٤) حساب احتمال وقوع الحدث $0<X<1$:

$$P(0<X<1)=\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)=\boxed{\frac{3}{8}}$$

(٥) لدينا $Y=X^3=g(X)$ و نعلم أن :

$$f_Y(y)=g^{-1}(y)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

لدينا $y=x^3$ و بالتالي $x=y^{\frac{1}{3}}=g^{-1}(y)$

الآن نشتق:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

عندما $0<x<2$ يكون $0<y<8$ نعوض :

$$f_y(y)=\begin{cases} y^{\frac{1}{3}}.\left|\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right| & : 0<y<8 \\ 0\,; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f_y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3y} : 0<y<8 \\ 0\,; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

السؤال الرابع :

أولاً : بفرض *(X,Y)* متجه عشوائي كثافته الاحتمالية :

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x+2y) : 0<x<2\,, 0<y<1 \\ 0 : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب : (١) عين قيمة الثابت c . (٢) عين دالة الكثافة الهامشية لـ X,Y

ثانياً : إذا كان X,Y متحولان عشوائياً منقطعان لهما جدول التوزيع المشترك

$X\backslash Y$	10	20
1	0.13	0.27
2	0.17	0.43

(١) أوجد جدول التوزيع الهامشي لكل من X,Y

(٢) هل X,Y مستقلان أم لا ؟؟

الحل :

أولاً لنوجد دالة الاحتمال الهامشية لكل من المتحولين :

X	1	2	□
$f_x(x)$	$0.13+0.27=0.4$	$0.17+0.43=0.6$	1

Y	10	20	□
$f_x(x)$	$0.13+0.17=0.3$	$0.27+0.43=0.7$	1

لمعرفة فيما إذا كانا مستقلان ، نشكل الجدول :

x	y	$f(x,y)$	$f_x(x)$	$f_y(y)$	$f_x(x).f_y(y)$
1	10	0.13	0.4	0.3	0.12
1	20	0.27	0.4	0.7	0.28
2	10	0.17	0.6	0.3	0.18
2	20	0.43	0.6	0.7	0.42

نلاحظ أن :

$$f_x(x).f_y(y) \neq f(x,y)$$

فهمان غير مستقلين احتمالياً

انتهى الحل.....

Syria Math