Syria Math

تحليل ١

الدكتور : نايف طلي

المحاضرة : السابعة عشرة

إعداد : رهف + رسمية + شهيناز

المحاضرة ١٨　　الأحد　　١٨/١٢/٢٠١٦

الموضوع : الاشتقاق

- الأشتقاق من مراتب عليا / دستور لايبنز /
- نشر الدوال وفق ماكلورات / تايلور

$f(x)$ قابل للاشتقاق من المرتبة n

$f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ f'''(x)\ \ldots\ldots\ f^{(n)}(x)$

$f^{(0)}(x) = f(x)\quad ,\quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$

$y = a^x \qquad y' = a^x \ln a \qquad y'' = a^x(\ln a)^2 \qquad y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

$\ln y = \ln a^x$
$\ln y = x \ln a$
$\frac{y'}{y} = \ln a$
$y' = a^x . \ln a$

مثال

$f(x) = x^\alpha$
مشتقة n

$f(x) = \cos x$

$f(x) = \sin x$

$u(x)\ ,\ v(x)$

$(u.v)^{(n)}$

$u^{(0)}(x) = u(x)$
$v^{(0)}(x) = v(x)$

$(u.v)' = u.v' + u'.v$

$(u.v)'' = u'.v' + v.u'' + u'.v' + u.v''$

$$= v \cdot u'' + 2 v' u' + u \cdot v''$$

$$(u+v)^1 = u + v$$

$$(u+v)^2 = u^2 + 2 u \cdot v + v^2$$

$$(u \cdot v)''' = v' \cdot u'' + v \cdot u''' + 2 [v'' \cdot u' + v' u''] + u' v''$$

$$= v \cdot u''' + 3 v' u'' + 3 u' v'' + u v'''$$

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2 v + 3 v^2 u + v^3$$

القانون الثنائي :

$$(a \cdot b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

مثال :

$$(u \cdot v)' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} u^{1-k} v^k$$

$$= \binom{1}{0} u' \cdot v + \binom{1}{1} u \cdot v'$$

٣

نشر الدوال : إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة في جوار الصفر وقابلة للاشتقاق n مرة فعندئذ يكون منشور هذه الدالة يعطى بالدستور :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots\dots \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n \dots\dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots a_n x^n$$

$f(x)$

$f(0) = a_0$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + n a_n x^{n-1}$$

$$f'(0) = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$f''(0) = 2a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + 4\cdot 3 a_4 x^2 + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$f''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

٤

$$f^{n}(x)$$

$$f^{n}(0) = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\, a_n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

مثال :

في جوار الصفر :

$$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{n}(x) = e^x \longrightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

حيث أن

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\neq 0}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x}^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{x^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x| = 0 < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

⑤

$y = \sin x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 -$

$(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1}$

$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2x-1}$

$\cos x$:مثال

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

$n = 0, 1, 2, \dots$

مثال غير محلول: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $\boxed{i = \sqrt{-1}}$

في جوار الصفر $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots x^n + \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

$f(x)$ $\frac{1}{1-x}$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1!$ $\qquad f'(x) = (1-x)^{-2}$

$f''(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) \Rightarrow f''(0) = 2!$ $\qquad f''(x) = 2(1-x)^{-3}$

$f'''(x) = -3 \cdot 2(1-x)^{-4}(-1) \Rightarrow f'''(0) = 3!$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n + \dots$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^n \longrightarrow |x| < 1$$